Baccalauréat C Dijon septembre 1973

EXERCICE 1

Dans le plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé on associe au point M de coordonnées $(x~;~y)$ le nombre complexe $z = x + \text{i}y$: on dit que z est l'affixe de M et que M est l'image de z.

1. Démontrer que les trois points P, Q, R deux à deux distincts de E d'affixes respectives $p,~q,~r$ forment un triangle rectangle en P si, et seulement si $\dfrac{r-p}{q-p}$ est imaginaire pur.
2. z étant un nombre complexe, on appelle $M_1,~M_2,~M_3$ les images respectives de $z_1,~z_2,~z_3$.
   Déterminer et construire l'ensemble (L) des points M_1 tels que les points $M_1,~M_2,~M_3$ déterminent un triangle rectangle.
   On notera que le triangle peut être rectangle en $M_1,~M_2,$ ou M_3 et l'on désignera par L_1, L_2, L_3, les sous-ensembles de (L) qui correspondent à ces trois éventualités.

EXERCICE 2

1. Le nombre $2^{11} - 1$ est-il premier ?
2. p et q étant deux entiers naturels non nuls, quel est le reste de la division par $2^p - 1$ du nombre $2^{pq} = \left(2^p\right)^q$?
   En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $\left(2^p - 1\right)$ et $\left(2^q - 1\right)$.
3. Démontrer que, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
   La réciproque est-elle vraie ?

PROBLÈME

1. Soit E un plan vectoriel rapporté à la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   À tout couple $(a~;~b)$ de nombres réels, on associe l'endomorphisme, noté $\varphi_{a,~b}$ de E, dont la matrice, relativement à la base $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est

$$\begin{pmatrix}\dfrac{a+b}{2} & \dfrac{a-b}{2}\\ \dfrac{a-b}{2} & \dfrac{a+b}{2}\end{pmatrix}$$

   On désigne par Φ leur ensemble.
   a. Quels sont les automorphismes de Φ ? On notera Φ_1 leur ensemble.
   Démontrer que, pour la loi de composition des applications, Φ_1 est un groupe commutatif.
   b. Déterminer les endomorphismes involutifs de Φ. Préciser leur nature géométrique.
2. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine associé à E, rapporté au repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, a et b étant deux nombres réels donnés, soit $f_{a,~b}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, au point M de coordonnées $(x~;~y)$, associe le point M' de coordonnées $(x'~;~y')$ définies par

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& \dfrac{a+b}{2}x + \dfrac{a-b}{2}y\\ y' &=& \dfrac{a-b}{2}x + \dfrac{a+b}{2}y\end{array}\right.$$

   On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications $f_{a,~b}$ lorsque $(a~;~b)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

a. Démontrer que tout élément de $\mathscr{F}$ est une application affine.

b. Quels sont les points invariants par l'application $f_{a,\,b}$?
Discuter suivant les valeurs de a et b.

c. On désigne par $\mathscr{G}$ le sous-ensemble des applications $f_{a,\,b}$ telles que $ab = 1$: les éléments de $\mathscr{G}$ sont les applications $g_a = f_{a,\,\frac{1}{a}}$.
Démontrer que $\mathscr{G}$ est un groupe pour la composition des applications,

3. Dans la suite du problème, l'espace vectoriel E est supposé euclidien et la base $\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ orthonormée.
λ étant un nombre réel non nul, on considère la courbe (C_λ) d'équation

$$x^2 - y^2 = 0.$$

a. Préciser la nature de (C_λ).
Construire (C_1), (C_{-1}) dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy.

b. Démontrer que (C_λ) est globalement invariante par $f_{a,\,b}$ si, et seulement si, $ab = 1$.

c. Soit $\mathscr{S}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite Ox.
Déterminer les coordonnées du transformé d'un point $M(x\,;\ y)$ par l'application $h_a = \mathscr{S} \circ g_a$.
Démontrer que h_a est une involution affine laissant invariante (C_λ).

4. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des applications h_a (a réel non nul).

a. Démontrer que $h_a = g_{\frac{1}{a}} \circ \mathscr{S}$.

b. En déduire que $\mathscr{C} \cup \mathscr{H}$ est un groupe pour la compositions des applications,