∽ Baccalauréat C Dijon septembre 1979 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit E l'anneau $\mathbb{Z}/39\mathbb{Z}$. La classe modulo 39 d'un entier n sera noté $\overline{n}$.

1. Soit f l'application de E dans E définie par

$$f(x) = \overline{20}.$$

a. Résoudre dans E l'équation

$$f(x) = \overline{1}.$$

b. Démontrer que l'application f est bijective.

2. Soit g l'application de E dans E définie par

$$g(x) = \overline{26}x.$$

a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}^{\star} \times N^{\star}$ l'équation

$$2n - 3p = 0.$$

Résoudre alors dans E l'équation

$$g(x) = \overline{0}.$$

b. L'application g est-elle bijective ?

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Le plan affine (P) est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. À tout point M de coordonnées $(x~;~y)$, on associe son affixe, le nombre complexe $z = x + \text{i}y$ (i désigne un nombre complexe dont le carré est égal à -1).

1. On appelle f l'application de (P) dans (P) qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\text{i}\overline{z} + 1 + 2\text{i},$$

où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de z.

Démontrer que f est une similitude indirecte ayant un centre, le déterminer ainsi que l'axe et le rapport.

2. Soit Ω le point d'affixe 1, déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) tels que $\left\|\overrightarrow{\Omega M'}\right\| = 2$.

PROBLÈME **13 POINTS**

On désigne par E un espace affine euclidien de dimension 2, par V l'espace vectoriel associé à E. Soit $\left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ une base orthonormée de V, on rapporte E au repère cartésien $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 16}.$$

1. Étudier les variations de f. Quelle est l'image de f ?

2. Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Démontrer que (C) admet deux droites asymptotes, l'une d'elles ayant pour équation cartésienne $y = x + 1$.

Préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes. Tracer (C).

3. Démontrer, sans calculs, que f considérée comme application de $\mathbb{R}$ sur $]1\ ;\ +\infty[$ admet une fonction réciproque, notée g.

Vérifier que g est définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x - 1 - \frac{4}{x - 1}.$$

Construire la courbe représentative de g dans le même repère que (C).

4. Calculer l'aire du domaine défini par les conditions

$$3 \leqslant x \leqslant 5 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

puis en déduire l'aire du domaine défini par les conditions

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 16}\,\text{d}x$

Partie B

Soit I le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On appelle (C′) l'image de (C) dans la symétrie par rapport à I, (H) l'ensemble (C) $\cup$ (C′). On appelle σ l'application affine qui, à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ associe le point M' de coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x \\ y' & = & -x + y. \end{array}\right.$$

1. a. Vérifier qu'une équation cartésienne de (H) dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est

$$y^2 - xy + x - 2y - 3 = 0.$$

b. Écrire une équation cartésienne de (H′), image de (H) par f. En déduire la nature de (H′), son centre, ses sommets, ses asymptotes.

2. On appelle ϕ l'endomorphisme associé à l'application affine σ. On note ϕ^0 l'application identique, ϕ^1 l'application ϕ; n désignant un entier naturel, on désigne par ϕ^{n+1} l'application $\phi^n \circ \phi$, où $\circ$ représente le produit de composition des applications.

Démontrer que la matrice de l'application ϕ^n dans la base $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ est du type

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$$

où a_n est le terme général de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l} a_0 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & 2a_n - \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Soit (u) la suite de terme général $u_n = a_n - \dfrac{1}{2}$. Quelle est la nature de la suite (u) ?

Exprimer u_n puis a_n à l'aide de n.

3. Soit A_0 le point de (C) d'abscisse 3. On note A_1 le point $\sigma(A_0)$, A_2 le point $\sigma(A_1), \cdots, A_{n+1}$ le point $\sigma(A_n)$, n étant un entier naturel.

a. Calculer les coordonnées du point A_n et vérifier que les points $A_0, A_1, \cdots, A_n$ sont situés sur une même droite.

b. On appelle G_n le barycentre du système

$$\left\{(A_0,\, 1)\,;\left(A_1,\, \frac{1}{4}\right);\ldots;\left(A_p,\, \frac{1}{4^p}\right);\ldots;\left(A_n,\, \frac{1}{4^n}\right)\right\}$$

Calculer les coordonnées $(X_n\,;\, Y_n)$ de G_n dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$.

Les suites (X) et (Y) de termes généraux respectifs X_n et Y_n sont-elles convergentes ?