ᔓ Baccalauréat Dijon juin 1966 ᔕ
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

1. Démontrer que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8.
2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$8x+1=y^2.$$

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
On désigne par (E) l'ensemble des points du plan non situés sur l'un des axes de coordonnées.
Dans l'ensemble (E), on considère la transformation. ponctuelle T_1 qui, à tout point m de coordonnées x et y, fait correspondre le point M de coordonnées X et Y, X et Y étant déterminés par les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& x\\ Y &=& \dfrac{1}{y}\end{array}\right.$$

1. Montrer que cette transformation réalise une application bijective (on peut dire aussi application biunivoque, ou bijection) et involutive de (E) sur lui-même.
   Rechercher les points doubles de T_1.
2. On considère une droite (D). Quel est l'ensemble transformé de (D) $\cap$ (E) :
   a. lorsque (D) est parallèle à l'un des axes de coordonnées ;
   b. lorsque (D) n'est pas parallèle à l'un des axes de coordonnées ?
3. On considère le cercle (C) de centre O, de rayon 1.
   Le point m variant sur la droite $y = b$, montrer que la polaire de M (transformé de m) par rapport à (C) passe par un point fixe.
4. On considère la transformation T_2 qui à tout point $m(x~;~y)$ associe le point m' dont les coordonnées, x' et y', sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \dfrac{1}{x}\\ y' &=& y\end{array}\right.$$

   Montrer que la transformation T= $T_2 \circ T_1$ est une bijection de E sur lui-même.
   T est-elle involutive ?
5. On considère le point $A(a~;~b)$ et son image $A''(a''~;~b'')$ par T. Comment faut-il choisir A pour que O, A et A'' soient alignés ?
   Lorsqu'il n'en est pas ainsi, quelles sont les bissectrices de l'angle AOA'' ?
6. On considère le cercle (C) d'équation

$$x^2+y^2-1=0.$$

   Former l'équation de la courbe (Γ) transformée de (C) $\cap$ (E) par T.

Quels sont les éléments de symétrie de (Γ) ?

Construire la branche $\left(\gamma_1\right)$ de (Γ) située dans le premier quadrant.

Soit H le point d'abscisse 2 de $\left(\gamma_1\right)$, B_1 la projection orthogonale de B sur $x'Ox$. Un point variable M d'abscisse λ décrit $\left(\gamma_1\right)$. M_1 désigne la projection de M sur Ox.

Évaluer l'aire arithmétique du trapèze mixtiligne BB_1M_1M :

a. lorsque $\lambda > 2$. Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers $+\infty$?

b. lorsque $1 < \lambda < 2$. Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers 1 ?