

∞ Baccalauréat Dijon juin 1966 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

1. Démontrer que le carré de tout nombre impair est congru à 1 modulo 8.
2. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$8x + 1 = y^2.$$

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On désigne par (E) l'ensemble des points du plan non situés sur l'un des axes de coordonnées.

Dans l'ensemble (E), on considère la transformation ponctuelle T_1 qui, à tout point m de coordonnées x et y , fait correspondre le point M de coordonnées X et Y , X et Y étant déterminés par les relations

$$\begin{cases} X &= x \\ Y &= \frac{1}{y} \end{cases}$$

1. Montrer que cette transformation réalise une application bijective (on peut dire aussi application biunivoque, ou bijection) et involutive de (E) sur lui-même.
Rechercher les points doubles de T_1 .
2. On considère une droite (D). Quel est l'ensemble transformé de $(D) \cap (E)$:
 - a. lorsque (D) est parallèle à l'un des axes de coordonnées;
 - b. lorsque (D) n'est pas parallèle à l'un des axes de coordonnées?
3. On considère le cercle (C) de centre O, de rayon 1.
Le point m variant sur la droite $y = b$, montrer que la polaire de M (transformé de m) par rapport à (C) passe par un point fixe.
4. On considère la transformation T_2 qui à tout point $m(x; y)$ associe le point m' dont les coordonnées, x' et y' , sont données par

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{x} \\ y' &= y \end{cases}$$

Montrer que la transformation $T = T_2 \circ T_1$ est une bijection de E sur lui-même.

T est-elle involutive?

5. On considère le point $A(a; b)$ et son image $A''(a''; b'')$ par T. Comment faut-il choisir A pour que O, A et A'' soient alignés?
Lorsqu'il n'en est pas ainsi, quelles sont les bissectrices de l'angle AOA'' ?

6. On considère le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Former l'équation de la courbe (Γ) transformée de (C) $\cap$ (E) par T.

Quels sont les éléments de symétrie de (Γ) ?

Construire la branche (γ_1) de (Γ) située dans le premier quadrant.

Soit H le point d'abscisse 2 de (γ_1), B_1 la projection orthogonale de B sur $x'Ox$. Un point variable M d'abscisse λ décrit (γ_1). M_1 désigne la projection de M sur Ox .

Évaluer l'aire arithmétique du trapèze mixtiligne BB_1M_1M :

- a. lorsque $\lambda > 2$. Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers $+\infty$?
- b. lorsque $1 < \lambda < 2$. Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers 1 ?