Dijon juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit D une droite fixe, O un point fixe de cette droite et α la mesure d'un angle orienté (définie modulo 2π).
On désigne par S la symétrie par rapport à D et par R la rotation de centre O et d'angle α. En décomposant R en le produit de deux symétries convenables, étudier les transformations $R \circ S$ et $S \circ R$.

EXERCICE 2

Soit le nombre complexe

$$Z = 10 - 4\mathrm{i}\sqrt{6}.$$

Trouver les nombres complexes z de la forme $x + \mathrm{i}y$ tels que $z^2 = Z$.

EXERCICE 3

1. Étudier les variations de la fonction qui, à x, associe

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right),$$

où a est un nombre réel positif. On désigne par $C_{(a)}$ la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction correspondant à une valeur a positive déterminée.

Construire $C_{(a)}$, correspondant à la valeur $a = 1$ (on prendra 2 cm pour unité).

2. On considère l'homothétie de centre O, de rapport k, qui transforme un point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ en le point M' de coordonnées $(x'\ ;\ y')$.
Calculer x' et y' en fonction de x et y.
Montrer que la courbe $C_{(a)}$ est homothétique de $C_{(1)}$.

3. Dans cette question, on désigne par x et y les coordonnées d'un point M quelconque de $C_{(1)}$ distinct du point de coordonnées $(+1\ ;\ +1)$.
On pose $x = 1 + \frac{1}{u}$, $y = 1 + \frac{1}{v}$. Calculer v en fonction de u.
Montrer que les coordonnées de ce point M sont rationnelles si, et seulement si, u est rationnel.

4. On désigne par f la fonction

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

On considère la suite

$$x_0 = 2, \quad x_1 = f(x_0), \quad \ldots, x_n = f(x_{n-1}).$$

Montrer que $x_n > 1$.
Soit u_n le nombre défini par $x_n = 1 + \frac{1}{u_n}$.
Montrer que $u_{n+1} = 2u_n(1 + u_n)$.

Montrer par récurrence que les nombres u_n sont entiers positifs et que u_n est, pour $n \geqslant 1$, divisible par 2^{n+1} sans l'être par 2^{n+2}.

Démontrer que le reste de la division par 3 de u_n est 1 et que, pour $u \geqslant 2$, u_n est divisible par 5 sans l'être par 25.

Déterminer la limite de x_n quand n tend vers l'infini.