Baccalauréat Dijon septembre 1967
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

I.

Déterminer le plus grand diviseur commun des deux nombres suivants, écrits dans le système décimal :

$$52\,884 \quad \text{et} \quad 66\,105.$$

II.

On considère un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$ et les deux points A$(0~;~a)$, B$(0~;~-a)$ (a : longueur donnée).
Deux droites, (D) et (D$'$), pivotent respectivement autour de A et B de sorte que le produit de leurs pentes soit égal à k, k étant un nombre relatif donné.
Écrire l'équation du lieu géométrique du point M, intersection de (D) et (D$'$).
Discuter la nature de ce lieu suivant les valeurs de k.

III.

On désigne par f la fonction

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},$$

où x est une variable réelle.

1. Étudier les variations de f.
   Construire la courbe représentative, (C), dans un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$.
2. La tangente à (C) au point M, d'abscisse x, coupe $x'\mathrm{O}x$ en T.
   Calculer l'abscisse de T en fonction de x. (On désignera par X et Y les coordonnées d'un point quelconque de cette tangente.)
3. Le point M de la courbe (C) se projette orthogonalement en P sur $x'\mathrm{O}x$ et en Q sur $y'\mathrm{O}y$.
   Écrire l'équation de la droite PQ en fonction de l'abscisse, x, du point M.
   Montrer que la droite PQ reste tangente à un cercle (Γ) de centre O, lorsque M décrit (C).
   Soit (Δ) une tangente variable à (T), rencontrant $x'\mathrm{O}x$ en P$'$ et $y'\mathrm{O}y$ en Q$'$; soit M$'$ le point se projetant orthogonalement sur $x'\mathrm{O}x$ en P', sur $y'\mathrm{O}y$ en Q$'$.
   Quel est le lieu de M$'$ quand (Δ) varie en restant tangente à (Γ) ?
4. Calculer l'aire du domaine, S, compris entre la courbe (C), l'axe $x'\mathrm{O}x$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \lambda + 1 \quad (\lambda > 1)$.
   S a-t-elle une limite quand λ croit indéfiniment ?
   Peut-on prévoir l'existence de cette limite sans effectuer le calcul de S ?

N. B. La question **4.** est indépendante de la question **3.**.