

Durée : 4 heures

## ∞ Baccalauréat C Djibouti juin 1972 ∞

### EXERCICE 1

On donne la fonction  $f$ , telle que

$$f(x) = x \sin x \quad \text{et } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque,  $f^{-1}$ .
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  et calculer la dérivée de  $f$  lorsqu'elle existe.
3. Étudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  et calculer la dérivée de  $f^{-1}$  lorsqu'elle existe.
4. Construire sur un même graphique, le repère étant orthonormé, les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$ .

### EXERCICE 2

On rappelle que l'ensemble,  $S$ , des suites réelles est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On notera  $(U_n)$  une suite et  $U_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , le terme de rang  $n+1$  de la suite  $(U_n)$ . On considère l'ensemble  $(E)$  des suites  $(U_n)$  vérifiant la relation  $\mathcal{R}$  :

$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}.$$

1. Montrer que  $(E)$  est un sous-espace vectoriel de  $S$ .
2. On donne la suite géométrique  $(U_n)$  telle que  $U_n = r^n$ . Montrer qu'il existe deux valeurs de  $r$  telles que la suite géométrique correspondante soit élément de  $(E)$ . On notera ces deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
3. Soit  $(U_n) \in E$ . Montrer qu'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  réels, tels que

$$\begin{cases} U_0 &= \alpha a_0 + \beta b_0 \\ U_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 \end{cases}$$

Montrer que  $U_n = \alpha a_n + \beta b_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . En déduire une base de  $(E)$ .

### PROBLÈME

*Notations et questions préliminaires*

Si  $f$  est une application, on notera  $f^2$  l'application composée,  $f \circ f$ , et  $f^3$  l'application composée  $f \circ f \circ f$ .

$(E)$  est un plan vectoriel euclidien et  $(P)$  est un plan affine euclidien associé à  $(E)$ . Les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , sont des points de  $(P)$  tels que, dans un repère orthonormé, les coordonnées de  $O$  sont  $(0; 0)$ , de  $A(1; 0)$ , de  $C(0; -1)$  et de  $B(-1; 1)$ .

On note  $\overrightarrow{OA} = a$ ,  $\overrightarrow{OB} = b$  et  $\overrightarrow{OC} = c$ .

Représenter les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sur une figure.

Montrer que les systèmes  $\{\vec{a}, \vec{b}\}$  et  $\{\vec{b}, \vec{c}\}$  sont deux systèmes libres.

### Partie A

1.  $f$  est une application linéaire de  $(E)$  dans  $(E)$  telle que  $f(\vec{a}) = \vec{b}$  et  $f(\vec{b}) = \vec{c}$ .  
Montrer que le sous-ensemble  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  est invariant par  $f$ .
2. Montrer que  $f^3 = I$  [ $O$  étant l'application identique de  $(E)$ ].
3.  $f$  est-elle bijective?
4. Existe-t-il des vecteurs invariants par  $f$ ? Existe-t-il des droites vectorielles invariantes par  $f$ ?

### Partie B

$g$  est l'application affine de  $(P)$  dans  $(P)$ , associée à  $f$  et laissant  $O$  invariant :

$$M' = g(M) \iff OM' = f(OM).$$

1. Montrer qu'une droite a pour image, par  $g$ , une droite.  
Quel est la transformée de la droite  $(AB)$ ; de la droite  $(BC)$ ?  
Existe-t-il des droites parallèles à leur transformée?
2. Soit  $\mathcal{R}$  le repère  $(O, \vec{a}, \vec{b})$  du plan affine  $(P)$ .  
Soit  $(x; y)$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  et  $(x'; y')$  celles de  $M'$  dans ce repère  $\mathcal{R}$ , avec  $M' = g(M)$ .  $x = y'$ .  
Montrer que  $\begin{cases} x = y' - x' \\ y = -x' \end{cases}$ .
3. Montrer que, si une courbe admet  $O$  comme centre de symétrie, sa transformée par  $g$  admet aussi  $O$  comme centre de symétrie.

### Partie C

Soit  $(C)$  une courbe admettant  $O$  comme centre de symétrie, passant par les trois points  $A, B$  et  $C$  et dont l'équation dans le repère  $\mathcal{R}$  est de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \epsilon y + \varphi = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  et  $\varphi$  étant des nombres réels.

1. Montrer que, puisque  $(C)$  admet  $O$  comme centre de symétrie, on a  $\delta = \epsilon = 0$ .  
En déduire l'équation de  $(C)$ .
2. Former, en utilisant le B 2., l'équation de  $(C')$ , transformée de  $(C)$  par  $g$ . Pouvait-on prévoir le résultat?
3. Pour déterminer la nature de  $(C)$ , on choisit un repère  $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}, \vec{b})$ , avec  $\vec{i} = \vec{a} - \vec{c}$ .  
Calculer  $\vec{i}$  en fonction de  $\vec{a}$  et de  $\vec{b}$ , puis les coordonnées  $(x; y)$  d'un point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  en fonction de ses coordonnées  $(X; Y)$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ .  
En déduire l'équation de  $(C)$  dans le repère  $\mathcal{R}'$  et sa nature. Construire la courbe  $(C)$ .