Baccalauréat C Djibouti juin 1973

EXERCICE 1

Résoudre, dans le corps des nombres complexes, l'équation

$$\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^3+\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2+\frac{z^2+1}{z}+1=0.$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x)=x(1-x)+|x(1-x)| \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? En quels points est-elle dérivable ?
2. Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé.

   Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont telles que $-1\leqslant x\leqslant 2$ et $f(x)\leqslant y\leqslant 1$.

EXERCICE 3

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2, et soit E un espace affine associé à V.
Soit $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ un repère de E, le couple $\left(\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ étant une base de V.
Si h est une application d'un ensemble dans lui-même, on rappelle que la notation h^n est définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par

$$h^0=\mathrm{I}\,(\text{identité}),\ \text{et}\ h^n=h^{n-1}\circ h,\ \text{pour tout}\ n>0.$$

Pour tout nombre réel non nul λ, soit T_λ l'application affine de E dans E, faisant correspondre à un point M, de coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$, le point M$'$, de coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ dans ce même repère :

$$x'=x+\lambda y+1-\lambda \quad \text{et} \quad y'=-\frac{x}{\lambda}-y+2.$$

Soit f_λ, l'application linéaire de l'espace vectoriel V dans lui-même, associée à l'application affine T_λ.

1. Quelle est la matrice de f_λ par rapport à la base $\left(\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ de V ?

   Déterminer le noyau et l'image de f_λ.

   L'application f_λ est-elle bijective ?

   Quelles sont les images des applications $f^2,\ldots,f^n$, $(n\geqslant 2)$.
2. L'application v est-elle bijective ?

   Quels sont les ensembles, image de T_λ, et image réciproque par T_λ du point $\mathrm{T}_\lambda(0)$?

   Écrire les équations de ces ensembles dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$.

   Montrer que l'application T_λ a un seul point double A_λ, que l'on déterminera.

   Quel est l'ensemble des points v lorsque λ décrit l'ensemble $\mathbb{R}^*$ des nombres réels non nuls ?

3. Montrer que les applications linéaires f, de V dans V, telles que $f^2 = 0$, sont les applications linéaires représentées dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, par une matrice de l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix}0 & \mu\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ \mu & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mu & \mu\lambda\\ -\dfrac{\mu}{\lambda} & -\mu\end{pmatrix}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

4. **a.** Démontrer que pour toute application linéaire f, de V dans V, il existe des coefficients réels, α_2 et β_2 tels que

$$f^2 = \alpha_2 \mathrm{I} + \beta_2 f,$$

I étant l'identité sur E. [Trouver α_2 et β_2 en fonction des coefficients, a, b, c, d, e de la matrice $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ représentant f dans la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

b. En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des coefficients réels, α_n et β_n tels que

$$f^n = \alpha_n \mathrm{I} + \beta_n f,$$

et trouver, pour $n > 2$, α_n et β_n en fonction de α_{n-1}, β_{n-1}, α_2, β_2.

Montrer que si f n'est pas une homothétie vectorielle, la relation $\alpha_{\mathrm{I}} + \beta f$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$), est équivalente à $\alpha = \beta = 0$.

c. Conclure que si f est une application linéaire de V dans V, pour laquelle il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$, alors $f^2 = 0$.

(Montrer d'abord que si une application $f \neq 0$ est telle que $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$, on a $f^n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.)