

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Djibouti ¹ juin 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit E un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit Γ l'ensemble des points de E dont les coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient :

$$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = 0.$$

Montrer que Γ est la réunion de deux coniques Γ_1 et Γ_2 (on remarquera que le membre de gauche est une différence de deux carrés).

2. Représenter Γ après avoir précisé le centre et les sommets des coniques Γ_1 et Γ_2 .

EXERCICE 2

4 points

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^6 + 1 = 0.$$

On pose $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$; montrer que les solutions de l'équation précédente sont les six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme α .

2. On désigne par A, B, C, D, E, F respectivement les points d'affixes $2\alpha, 4\alpha^3, 4\alpha^5, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^3}, \frac{2}{\alpha^5}$ et par O le point d'affixe zéro.

Représenter sur un dessin la figure formée par les sept points A, B, C, D, E, F, O.

Montrer que les points A, B, C, D, E, F appartiennent au cercle de diamètre [BF]. On pourra, par exemple, montrer que les triangles OEF, OFC, ODA et OAB sont rectangles.

PROBLÈME

12 points

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe

$$f(x) = (1+x)e^{-2x}.$$

On se propose dans ce problème d'utiliser une équation différentielle satisfaite par f pour donner une méthode de calcul des dérivées successives de f , et d'interpréter géométriquement cette méthode.

Partie A

1. Maroc, Portugal, Sénégal

1. Étudier f . En donner, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique (\mathcal{C}) soignée en précisant les points d'intersection avec les axes, ainsi que les tangentes en ces points (unité : 2 cm).
2. Soit a un réel strictement plus grand que -1 . On note (\mathcal{D}) le domaine délimité par la droite d'équation $x = a$, l'axe des abscisses et (\mathcal{C}) .
Calculer en cm^2 l'aire de (\mathcal{D}) en fonction de a .
Montrer que cette aire a une limite quand a tend vers $+\infty$ et la calculer.

Partie B

1. Quels doivent être les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$(1) \quad y'' + ay' + by = 0?$$

Démontrer qu'alors, toutes les dérivées de f vérifient (1). Calculer l'ensemble des primitives de f , et chercher si une de ces primitives vérifie l'équation (1).

2. On pose $f^{(0)} = f$ et pour n entier naturel non nul on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f . La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (c_n) et (d_n) qui vérifient : pour tout n entier naturel.

$$\begin{cases} f^{(n)} &= c_n f' + d_n f \\ c_{n+1} &= -4c_n + d_n \\ d_{n+1} &= -4c_n. \end{cases}$$

3. On définit deux suites (γ_n) et (δ_n) ($n \geq 0$) par les formules

$$c_n = (-2)^n \gamma_n \quad ; \quad d_n = (-2)^n \delta_n.$$

Montrer que la suite de terme général $\delta_n - 2\gamma_n$ admet une valeur constante que l'on déterminera. En déduire que la suite (γ_n) est une suite arithmétique que l'on explicitera.

Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x .

Partie B

Soit l'application : $g : M(x; y) \longrightarrow M'(x'; y')$ définie analytiquement par les relations :

$$\begin{cases} x' &= -4x + y \\ y' &= -4x. \end{cases}$$

1. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(1; 0)$ et $B(0; 1)$. On note $A' = g(A)$.
Quelles sont les coordonnées de A' ?
On définit une unique application affine s par les relations
 $s(O) = O, \quad s(A) = B, \quad s(B) = A$
Reconnaitre s et donner ses éléments caractéristiques.
 2. On pose $h = s \circ g$. Démontrer que h est une application affine. Déterminer $h(O)$, $h(A)$, $h(B)$ et reconnaître que h est une affinité.
En déduire, à l'aide de la relation $h = s \circ g$ une construction géométrique de l'image M' d'un point M par g .
- N. B.** - La partie C du problème est indépendante des parties A et B.
La partie C est hors programme.