Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Djibouti [1] juin 1986 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit E un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Soit Γ l'ensemble des points de E dont les coordonnées $(x~;~y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ vérifient :

$$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1\,296y^2 = 0.$$

Montrer que Γ est la réunion de deux coniques Γ_1 et Γ_2 (on remarquera que le membre de gauche est une différence de deux carrés).

2. Représenter Γ après avoir précisé le centre et les sommets des coniques Γ_1 et Γ_2.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 + 1 = 0.$$

On pose $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$; montrer que les solutions de l'équation précédente sont les six premiers termes d'une suite géométrique de premier terme α.

2. On désigne par A, B, C, D, E, F respectivement les points d'affixes $2\alpha, 4\alpha^3, 4\alpha^5$, $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha^3}, \dfrac{2}{\alpha^5}$ et par O le point d'affixe zéro.
Représenter sur un dessin la figure formée par les sept points A, B, C, D, E, F, O.
Montrer que les points A, B, C, D, E, F appartiennent au cercle de diamètre [BF]. On pourra, par exemple, montrer que les triangles OEF, OFC, ODA et OAB sont rectangles.

PROBLÈME **12 points**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$f(x) = (1 + x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

On se propose dans ce problème d'utiliser une équation différentielle satisfaite par f pour donner une méthode de calcul des dérivées successives de f, et d'interpréter géométriquement cette méthode.

Partie A

1. Étudier f. En donner, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique $(\mathscr{C})$ soignée en précisant les points d'intersection avec les axes, ainsi que les tangentes en ces points (unité : 2 cm).

1. Maroc, Portugal, Sénégal

2. Soit a un réel strictement plus grand que -1. On note $(\mathcal{D})$ le domaine délimité par la droite d'équation $x = a$, l'axe des abscisses et $(\mathcal{C})$.
Calculer en cm^2 l'aire de $(\mathcal{D})$ en fonction de a.
Montrer que cette aire a une limite quand a tend vers $+\infty$ et la calculer.

Partie B

1. Quels doivent être les coefficients a et b pour que la fonction f vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$(1) \qquad y'' + ay' + by = 0\,?$$

Démontrer qu'alors, toutes les dérivées de f vérifient (1). Calculer l'ensemble des primitives de f, et chercher si une de ces primitives vérifie l'équation (1).

2. On pose $f^{(0)} = f$ et pour n entier naturel non nul on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
La fonction f est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Démontrer par récurrence l'existence de deux suites (c_n) et (d_n) qui vérifient : pour tout n entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{lcl} f^{(n)} & = & c_n f' + d_n f \\ c_{n+1} & = & -4c_n + d_n \\ d_{n+1} & = & -4c_n. \end{array}\right.$$

3. On définit deux suites $\left(\gamma_n\right)$ et (δ_n) $(n \geqslant 0)$ par les formules

$$c_n = (-2)^n \gamma_n \quad ; \quad d_n = (-2)^n \delta_n.$$

Montrer que la suite de terme général $\delta_n - 2\gamma_n$ admet une valeur constante que l'on déterminera. En déduire que la suite $\left(\gamma_n\right)$ est une suite arithmétique que l'on explicitera.
Calculer $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x.

Partie B

Soit l'application : $g : M(x\,;\,y) \longmapsto M'\left(x'\,;\,y'\right)$ définie analytiquement par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -4x + y \\ y' & = & -4x. \end{array}\right.$$

1. Dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, soit A$(1\,;\,0)$ et B$(0\,;\,1)$. On note $\text{A}' = g(\text{A})$.
Quelles sont les coordonnées de A' ?
On définit une unique application affine s par les relations
$s(\text{O}) = \text{O}, \quad s(\text{A}) = \text{B}, \quad s(\text{B}) = \text{A}$
Reconnaître s et donner ses éléments caractéristiques.

2. On pose $h = s \circ g$. Démontrer que h est une application affine. Déterminer $h(\text{O})$, $h(\text{A})$, $h(\text{B})$ et reconnaître que h est une affinité.
En déduire, à l'aide de la relation $h = s \circ g$ une construction géométrique de l'image M' d'un point M par g.
N.B. - La partie C du problème est indépendante des parties A et B.
La partie C est hors programme.