Document de travail pour l'atelier de la journée régionale APMEP d'Aix-Marseille du 17 mai
André BONNET *andre.bonnet9@orange.fr*

La décomposition de Dunford des endomorphismes.

En travaillant avec un jeune collègue, candidat à l'agrégation interne de mathématiques, je suis tombé, tout à fait par hasard, sur un article Daniel Ferrand[1] dont l'introduction est la suivante :

> « A un candidat qui avait donné la démonstration usuelle, sur $\mathbb{C}$, de la décomposition de Dunford :
>
> $$f = f_s + f_n \quad \text{avec} \quad f_s \, o \, f_n = f_n \, o \, f_s \,, \quad f_s \text{ diagonalisable et } \quad f_n \text{ nilpotent »}$$
>
> le jury a posé la question suivante :
>
> « peut-on calculer f_s et f_n sans connaître les valeurs propres de f ».

La réponse étant affirmative, le but de cet article est d'adapter[2] la méthode (donnée par Daniel Ferrand) au cas des endomorphismes sur un K-espace vectoriel de dimension finie et dont le corps de base est K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans cette méthode l'endomorphisme f_s est obtenu par une suite qui stationne à partir d'un certain rang. La formule de récurrence, qui définit cette suite, est très proche de la "vénérable" méthode de Newton (bien connue pour la recherche de valeurs approchées de racines d'une équation numérique).

1 – La décomposition de Dunford d'un endomorphisme par la méthode usuelle :

Théorème :

Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et si f est un endomorphisme de E, alors il existe deux endomorphismes de E, notés d et n tels que :
$f = d + n$, $\quad d$ est diagonalisable, $\quad n$ est nilpotent $\quad$ et $\quad d \, o \, n = n \, o \, d$
Cette décomposition est unique (sous réserve de commutativité) ; de plus d et n sont dans $K[f]$.

Démonstration :

Elle repose essentiellement sur l'utilisation du théorème de décomposition des noyaux.
1.a. Commençons par le cas complexe ($K = \mathbb{C}$).

Démonstration de l'existence :
Ecrivons le polynôme caractéristique de f sous forme factorisée :

$$\chi_f = \prod_{k=1}^{s} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

---

[1] Université de Rennes 1, **« Une méthode effective pour la décomposition de Dunford »** Préparation à l'agrégation interne de mathématiques, 2003. **http://www.math.jussieu.fr/~dferrand/Dunford.pdf**

[2] Le théorème et sa démonstration sont donnés dans le cadre général d'une K-algèbre de dimension finie et pour un corps K quelconque.

E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques $F_k = ker(f - \lambda_k\, Id_E)^{m_k}$.

Soit d l'endomorphisme de E dont la restriction à F_k est exactement$\lambda_k\, Id_{F_k}$. Cet endomorphisme est diagonalisable et admet comme sous espaces propres les sous espaces F_k.

Posons $n = f - d$. Il reste à vérifier que n est nilpotent et que d commute avec n.

Comme chaque sous-espace caractéristique de f est stable par f et par d, il est stable aussi par n ; il reste donc à vérifier la commutativité pour les restrictions aux sous-espaces F_k .

Notons, avec l'indice k, les restrictions à F_k. On a : $f_k = d_k + n_k$ et $d_k = \lambda_k\, Id_{F_k}$.

Or, par définition de F_k , $(f_k - \lambda_k\, Id_{F_k})^{m_k} = 0$; ce qui démontre que n_k est nilpotent, on déduit immédiatement que n est nilpotent.

De plus, d_k étant une homothétie, d_k commute avec n_k ce qui permet d'affirmer que d commute avec n.

Démontrons maintenant que d et n sont des polynômes en f.

Si on note π_k la projection sur F_k parallèlement à la somme de tous les autres sous-espaces caractéristiques de f. Le théorème de décomposition des noyaux nous permet d'affirmer que ces projections sont des éléments de $\mathbb{C}[f]$. Or par construction on a :

$$d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k \qquad \text{donc} \qquad d \in \mathbb{C}[f]\,.$$

Bien entendu, $n = f - d$ est aussi dans $\mathbb{C}[f]$.

Démontrons l'unicité de la décomposition :

Supposons l'existence d'un autre couple (d', n') vérifiant les conditions requises, en particulier la condition $f = d' + n'$. On a alors : $d' - d \; = \; n - n'$.

Comme d' commute avec n', il commute aussi avec f, mais aussi avec d et avec n (car se sont des polynômes en f). On en conclu que d' commute avec d et que d et d' sont codiagonalisables ce qui entraine que $d' - d = n - n'$ est diagonalisable.

De même, n commute avec n'. Il en découle que $n - n'$ est nilpotent ; en effet pour q assez grand :

$$(n - n')^q \; = \; \sum_{j=0}^{q} \; (-1)^j\, C_q^j \; n^j \; (n')^{q-j} \; = \; 0\,.$$

Or le seul endomorphisme à la fois diagonalisable et nilpotent est l'endomorphisme nul. On en conclu que $d' = d$ et $n' = n$.

1.b. Le cas réel ($K = \mathbb{R}$).

Si le polynôme caractéristique χ_f est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ la démonstration précédente peut être reconduite à l'identique. Supposons donc que f possède au moins une valeur propre complexe (non réelle). On peut alors écrire χ_f sous la forme :

$$\chi_f \;=\; \prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{t}(X-\mu_j)^{\beta_j}(X-\bar{\mu}_j)^{\beta_j}$$

On pose $s = r + t$ et on définit les polynômes P_k ainsi que les exposants m_k par :

$$\text{pour} \quad k = 1, \dots, r \quad ; \quad P_k = X - \lambda_k \quad \text{et} \quad m_k = \alpha_k$$

$$\text{pour} \quad k = 1, \dots, t \quad ; \quad P_{r+k} = X^2 - 2Re(\mu_k) + |\mu_k| \quad \text{et} \quad m_{r+k} = \beta_k$$

En appliquant le théorème de décomposition des noyaux à $\chi_f = \prod_{k=1}^{s} {P_k}^{m_k}$ on peut encore écrire E comme somme directe des sous espaces $F_k = ker[\,{P_k}^{m_k}(f)]$.

Comme dans le cas complexe, on pose, pour $k = 1, \dots, r$: $d_k = \lambda_k\, Id_{F_k}$.

Pour les valeurs $k = r+1, \dots, s$, on peut remarquer que les sous-espaces F_k sont de dimensions paires, donc chaque F_k est une somme directe de plans et on définit d_k en imposant que sa restriction à ces plans soit une similitude caractérisée par le nombre complexe μ_k . La matrice de la restriction de d_k à un plan est donc de forme :

$$|\mu_k|\begin{pmatrix}\cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k)\\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k)\end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \theta_k = \arg(\mu_k)$$

On termine la démonstration, comme dans le cas complexe, en imposant que l'endomorphisme d de E ait comme restriction à F_k exactement d_k et en prenant $n = f - d$.

2 – La décomposition de Dunford d'un endomorphisme par une méthode explicite :

On reprend les notations de la première partie :

E est un K-espace vectoriel de dimension finie avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, f est un endomorphisme de E et on note χ_f son polynôme caractéristique.

2.a. Décomposition de χ_f :

- Si $K = \mathbb{C}$, χ_f est scindé :
$$\chi_f = \prod_{k=1}^{s}(X-\lambda_k)^{m_k} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k=1}^{s} m_k = \dim(E).$$
On pose dans ce cas : $P_k = X - \lambda_k$.

- Si $K = \mathbb{R}$, et si χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$: on pose $P_k = X - \lambda_k$.

- Si $K = \mathbb{R}$, et si f possède au moins une valeur propre complexe, χ_f est scindé sur $\mathbb{C}$:
$$\chi_f \;=\; \prod_{j=1}^{r}(X-\lambda_j)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{t}(X-\mu_j)^{\beta_j}(X-\bar{\mu}_j)^{\beta_j} \quad \text{avec} \quad r + 2\,t = \dim(E)\,.$$
on pose :
  - pour les valeurs propres réelles : $P_k = X - \lambda_k$ et $m_k = \alpha_k$
  - Pour les valeurs propres complexes : $P_{r+k} = (X-\mu_k)(X-\bar{\mu}_k)$, $m_{r+k} = \beta_k$ et $s = r + t$.

Dans tous les cas on peut écrire le polynôme caractéristique de f sous la forme :

$$\chi_f = \prod_{k=1}^{s} P_k{}^{m_k} .$$

2.b. Définition du polynôme $\boldsymbol{Q}$:

On pose : $Q = \prod_{k=1}^{s} P_k$ et $r = \max_{k=1,\dots,s} m_k$.

On peut alors affirmer que le polynôme Q divise χ_f et que χ_f divise Q^r

2.c. Les polynômes $\boldsymbol{Q'}$ et $\boldsymbol{\chi_f}$ sont premiers entre eux :

On considère ici la décomposition des polynômes dans le corps des complexes :

$$Q = \prod_{k=1}^{s} P_k \quad \text{avec} \quad P_k = X - \lambda_k$$

On en déduit :

$$Q' = \sum_{j=1}^{s} \left(\prod_{k=1,\ k\neq j}^{s} P_k \right)$$

et on a :

$$Q'(\lambda_i) = \prod_{k=1,\ k\neq i}^{s} P_k(\lambda_i) = \prod_{k=1,\ k\neq i}^{s} (\lambda_k - \lambda_i) \quad \neq 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1..s .$$

On obtiendrait de même (éventuellement) que $Q'(\overline{\lambda_i}) \neq 0$.

Donc Q' et χ_f n'ont aucune racine commune; ils sont premiers entre eux.

2.d. La relation $\boldsymbol{\chi_f = pgcd\,(\chi_f , \chi'_f)\,.\,Q}$:

Posons $\chi_f = P_k{}^{m_k} R_k$, alors $\chi'_f = P_k{}^{m_k - 1} (m_k P'_k R_k + P_k R'_k)$

On en déduit que $P_k{}^{m_k-1}$ divise $pgcd\,(\chi_f , \chi'_f)$. Mais $P_k{}^{m_k}$ne divise pas χ'_f .

Donc $pgcd\,(\chi_f , \chi'_f) = \prod_{k=1..s} P_k{}^{m_k - 1}$. Ce qui prouve qu'il est possible de déterminer Q en divisant χ_f par $pgcd\,(\chi_f , \chi'_f)$.

2.e. Un lemme d'inversibilité :

Lemme :

Dans une algèbre, la somme d'un élément inversible et d'un élément nilpotent, qui commutent, est un élément inversible.

Démonstration :

Soit u un élément inversible et v un élément nilpotent d'ordre α tels que u et v commutent.

Posons $w = u + v$ et $n = -u^{-1}v$.

Montrons que n est un élément nilpotent, d'ordre α, et que w est un élément inversible.

$$n^\alpha = (-u^{-1}v)^\alpha = (-1)^\alpha (u^{-1})^\alpha\, v^\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad w = u\,(1+u^{-1}v) = u\,(1-n)$$

Or $(1-n)(1+n+n^2+\cdots+n^{\alpha-1}) = 1-n^\alpha = 1$, donc w est un élément inversible, car produit de deux éléments inversibles qui commutent.

2.f. Construction de la suite f_n :

Dans la suite $\mathscr{A}$ désigne la sous-algèbre, notée habituellement $K[f]$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des puissances de f à coefficients dans K.

On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = f_n - Q(f_n)\, Q'(f_n)^{-1}$.

L'existence de cette suite repose sur l'inversibilité de $Q'(f_n)$; celle-ci sera obtenu par récurrence.

Posons $\mathcal{H}_n$: (i) $Q'(f_n)$ est inversible et son inverse est dans $\mathscr{A}$

(ii) $Q(f_n)$ est nilpotent

(iii) $Q(f_n) \in Q(f)^{2^n}\mathscr{A}$

<u>Démontrons</u> $\mathcal{H}_0$:

- On sait que Q' et χ_f sont premiers entre eux, donc (Bezout) il existe deux polynômes A et B tels que $A\,Q' + B\,\chi_f = 1$ ce qui implique $A(f)oQ'(f) + B(f)o\,\chi_f(f) = Id_E$.

  Or (Caley-Hamilton) $\chi_f(f) = 0$, donc $A(f)o\,Q'(f) = Id_E$.

  On en déduit que $Q'(f)$ est inversible et que son inverse est dans $\mathscr{A}$.

- Il est évident que $\left(Q(f)\right)^r = Q^r(f)$.
  Or Q^r est divisible par χ_f , donc il existe un polynôme C tel que $Q^r = C\,\chi_f$ ce qui donne
  $$\left(Q(f)\right)^r = C(f)o\,\chi_f(f) = 0$$
- Pour $n=0$, $2^n = 1$, donc $Q(f_0) \in Q(f)^{2^0}\mathscr{A}$

<u>Démontrons</u> $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$:

- Comme Q' est un polynôme, en utilisant la définition de de la suite f_n on a :

  $$Q'(f_{n+1}) - Q'(f_n) \in (f_{n+1}-f_n)\,\mathscr{A} \subset Q(f_n)\,\mathscr{A}$$

  donc $Q'(f_{n+1})$ est la somme de $Q'(f_n)$ et d'un élément nilpotent. Ceci prouve, d'après le lemme, que $Q'(f_{n+1})$ est inversible.

- Q étant un polynôme on peut écrire :
  $$Q(X+Y) = Q(X) + Y\,Q'(X) + Y^2\,\tilde{Q}\,(X,Y)$$
  Il suffit, pour cela, d'utiliser le binôme de Newton sur les monômes que l'on peut écrire :
  $$(X+Y)^m = X^m + m\,Y\,X^{m-1} + Y^2\,\tilde{Q}_m\,(X,Y)$$
  On en tire :
  $$\begin{aligned} Q(f_{n+1}) &= Q(f_n - Q(f_n)\,Q'(f_n)^{-1}) \\ &= Q(f_n) - Q(f_n)Q'(f_n)^{-1}Q'(f_n) + Q(f_n)^2\,Q'(f_n)^{-1}\,\tilde{Q}\,(.,.) \\ &= Q(f_n)^2\,Q'(f_n)^{-1}\,\tilde{Q}\,(.,.) \end{aligned}$$
  Donc $Q(f_{n+1}) \in Q(f_n)^2\mathscr{A} \subset Q(f)^{2^{n+1}}\,\mathscr{A}$.

- Comme $Q(f)$ est nilpotent, $Q(f_{n+1})$ est aussi nilpotent.

Conclusion : La définition, par récurrence, de la suite f_n est justifiée.

2.g. La suite f_n est stationnaire :

Dès que $2^n \geq r$ on a $Q(f)^{2^n} = 0$ donc, d'après (iii) $Q(f_n) = 0$ ce qui implique $f_{n+1} = f_n$.

On notera p le rang à partir du quel la suite stationne et g l'élément final.

2.h. Etude de l'élément final g :

On pose $h = f - g$.

En écrivant h sous la forme : $h = f_0 - f_1 + f_1 - f_2 + \cdots + f_{p-1} - f_p$, c'est-à-dire comme une somme d'éléments nilpotents qui commutent (car ce sont des polynômes en f), on montre que h est nilpotent.

Il reste à montrer que g est diagonalisable.

Pour $n = p$, la relation de récurrence devient : $g = g - Q(g)\,Q'(g)^{-1}$; donc $Q(g) = 0$.

Le polynôme Q étant à racines simples, on en déduit que g est diagonalisable[3].

On obtient la décomposition de Dunford en posant $d = g$ et $= h$.

2.i. Etude algorithmique :

On constate que la détermination de g ne nécessite pas la connaissance des valeurs propres de f, ce qui donne la réponse à la question posée au début.

La détermination de χ_f est purement algorithmique et automatique pour certains logiciels comme Maple par exemple.

On a vu que la détermination de Q peut se faire par division de χ_f par $pgcd\,(\chi_f\,,\chi_f')$.

On peut donc construire la suite f_n de façon automatique avec un logiciel de calcul formel et ainsi déterminer la décomposition de Dunford (voir en annexe l'algorithme).

2.j. Rapidité de l'algorithmique :

On a vu que la suite f_n stationne dès que $2^n \geq r$; or $r \leq \dim(E)$. On est donc assuré d'obtenir l'endomorphisme g, en un nombre p d'itérations où p est le premier entier tel que $2^p \geq \dim(E)$.

Ceci donne :	pour $\dim(E) < 4$	$p \leq 2$
	pour $\dim(E) < 8$	$p \leq 3$
	pour $\dim(E) < 16$	$p \leq 4$ …

[3] On peut même affirmer que Q est le polynôme minimal de g. En effet, comme g et h commutent ils sont cotrigonalisables (sur $\mathbb{C}$). Dans une base commune de trigonalisation, les valeurs propres de $f = g + h$ apparaissent sur la diagonale, comme sommes des valeurs propres de g et de h. L'endomorphisme h n'ayant que zéro comme valeur propre. On peut conclure que de f et de g ont les mêmes valeurs propres.

On retrouve ainsi la rapidité " phénoménale " de la méthode de Newton.

Annexe : l'algorithme

Celui-ci est écrit en langage naturel.

L'endomorphisme f à décomposer est supposé être fourni par une matrice A et la décomposition de Dunford sera obtenue, à la fin de l'algorithme, par les deux matrices S et N associées à f_s et f_n .

Algorithme Dunford :

entrer la matrice A_0

$A \leftarrow A_0$

Calculer le polynôme caractéristique χ_f *de* f *(ou de* A*)*

$Q \leftarrow \chi_f \,/\, pgcd(\chi_f \,,\, \chi_f')$

$B \leftarrow A$

$A \leftarrow A - Q(A)/\,Q'(A)$

tant que $A \neq B$ *faire*

> $B \leftarrow A$
>
> $A \leftarrow A - Q(A)/\,Q'(A)$

fin faire

$D \leftarrow A$

$N \leftarrow D - A_0$

afficher $(D\,, N)$

Remarque :

Suivant le langage utilisé, la condition $A \neq B$ pourra être remplacée par $rang(A) \neq 0$ (c'est, par exemple, le cas de Maple) .

Attention ! : En Maple, la lettre D est un symbole réservé (à la dérivation), il faut impérativement changer le nom de cette variable (prendre par exemple S).