



Résolution de problèmes de temps et durée

Une réflexion sur les procédures des élèves
et les représentations qui les génèrent

François Jaquet, Coordinateur international de l'ARMT

Le dispositif du RMT

- Le Rallye mathématique transalpin (RMT) est une **confrontation par classes sur la résolution de problèmes**, (3000 classes de BE, F, I, IsR, LU, CH, élèves de 8 à 16 ans, 24 sections régionales. 16e édition en 2008).
Pour les élèves, c'est un concours, pour ses animateurs c'est une entreprise au service de l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques:
 - 1 une confrontation par la résolution de problèmes, par le travail en équipes et la validation collective des solutions.
 - 2 une sensibilisation des maîtres à l'intérêt de laisser les élèves résoudre, seuls, des problèmes avant de les exploiter en classe.
 - 3 une analyse de stratégies de résolution des élèves, des obstacles qu'ils rencontrent, de leurs représentations pour fournir des données utiles à la communauté des maîtres, des formateurs et des chercheurs en didactique.

Les épreuves



- Une épreuve du RMT est composée de 5 à 7 problèmes à résoudre par la classe entière en une durée de 50 minutes. Ces problèmes sont choisis, de telle façon que chaque élève, indépendamment de son niveau, puisse y trouver son compte et que l'ensemble de la tâche soit globalement trop lourd pour un seul individu, aussi rapide soit-il.
- C'est la classe qui est responsable de son organisation du travail. Les élèves doivent produire une solution unique pour chacun des problèmes. Il n'y a pas que la "réponse juste" qui compte, les solutions sont jugées aussi sur la rigueur des démarches et la clarté des explications fournies. Le maître, absent, n'interviendra qu'après l'épreuve pour l'exploitation des problèmes et de leurs procédures de résolution,

La conduite du RMT

- L'Association du Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) composée actuellement de 24 sections gère l'**organisation scientifique** et administrative du RMT. Ses membres: des enseignants, formateurs, mathématiciens et/ou chercheurs en didactique des mathématiques, dont plusieurs d'entre eux appartiennent à des institutions de formation ou de recherche en didactique des mathématiques dans leurs pays respectifs. Ils élaborent les problèmes, les mêmes pour toutes les sections, les analysent en vue de leur exploitation en classe ou de leurs apports pour la didactique des mathématiques
- Ce travail se déroule par des **échanges permanents** et des **journées d'études internationales**



Elaboration et analyses des problèmes

- 1 Invention et rédaction des projets de problèmes, au sein des sections, avec analyse préalable et critères d'évaluation
- 2 Critique, discussion et rédaction d'une version définitive par de multiples consultations entre sections, avec traductions en français, italien allemand, hébreu.
- 3 Passation des épreuves (une d'essai, deux pour la confrontation, une « finale » pour les classes les mieux notées - contraintes de la « compétition »)
- 4 Statistique des résultats, puis analyses des procédures, obstacles, représentations, ...
- 5 Réflexion et proposition d'exploitations didactiques, en groupes de travail sur des concepts choisis

Ex 1. *L'âge des frères* (énoncé)

15.1.5. **Les âges des frères** (Cat. 3, 4, 5).

Dans une famille, il y a 3 garçons : Antoine, Bernard et Christian, et une fille Denise.

Denise regarde l'album de photos familial et constate que :

- quand Antoine avait 8 ans Bernard avait 12 ans
- quand Bernard avait 9 ans Christian avait 3 ans

Quel âge avait Christian quand Antoine avait 10 ans ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Ex 1. *L'âge des frères* (analyse préalable)

Domaine de connaissances

- Arithmétique (addition, soustraction) - Logique - Mesures (durées)

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que chaque enfant vieillit d'une année en même temps
- En déduire que Christian avait 6 ans ($3+3$) quand Bernard avait 12 ans ($9+3$) et Antoine 8 ans
- Conclure que Christian avait 8 ans ($6+2$) quand Antoine avait 10 ans ($8+2$).

Ou : faire un schéma temporel du type :

Antoine :	8	...	10	...
Bernard :	9	12
Christian :	3	8	...

Ou : considérer que Bernard et Antoine ont 4 années de différence et que Bernard et Christian ont 6 années de différence

- Conclure qu'Antoine a 2 ans de plus que Christian. Ainsi, quand Antoine avait 10 ans, Christian en avait 8.

Ex 1. *L'âge des frères* (barème et résultats)

Attribution des points

- 4 Réponse juste (8 ans) avec explications complètes.
- 3 Réponse juste, avec explications incomplètes, ou peu claires.
- 2 Réponse juste sans aucune explication ni justification.
- 1 Début de recherche cohérente, mais réponse fausse.
- 0 Incompréhension du problème, non-réponse.

	Classes/pts :	4	3	2	1	0	m
Cat 3	193	17	18	10	17	131	0,82
Cat 4	295	76	34	17	18	150	1,55
Cat 5	316	147	39	24	30	76	2.48



Ex 1. *L'âge des frères* (procédure B)

B. Procédure par «composition d'écart» (18/173)

Nous avons découvert qu'entre C et B il y avait 6 ans d'écart, car, $9 - 3 = 6$.

Mais aussi qu'il y a 4 ans d'écart entre A et B, car, $12 - 8 = 4$

Nous avons calculé qu'entre 4 et 6 il y a 2, donc, quand Antoine a 10 ans Christian a 8 ans. (FC503)

B₁ Dans cet exemple, les élèves trouvent 2 ans de différence entre A et C sans préciser qui est le plus âgé. C'est implicite.

B₂ Dans d'autres cas, on précise que A a deux ans de plus que C.

B₃ Certaines fois, ce type de procédure est accompagné d'un « schéma temporel » comme le mentionne l'analyse préalable.

La quasi totalité de ces procédures conduisent à la réponse correcte.



Ex 1. *L'âge des frères* (procédure C)

C. Procédure par « transpositions » d'écart constants ou/et calcul de différences les différentes « époques » de l'histoire des frères.

1. *Ce que je sais:*

A et B ont 4 ans de différence. - B et C ont 6 ans de différence.

2. *Quel âge avait C quand A avait 10 ans?*

3. *Calculs: Donc quand B a 9 ans, A a 5 ans.*

De 5 à 3 = 2 ans de différence. Quand A a 10 ans, C en a 8 ans

4. *Réponse. Quand A a 10 ans C a 8 ans. (SR 403)*

L'écart de 4 ans entre A et B est transposé dans le temps sur le moment où B avait 9 ans pour déterminer l'écart entre A et C.

Ex 1. *L'âge des frères* (procédure C_1)

C_1 . Procédure par « transposition » de -3 ans reconnaissables au « $3 + 5 = 8$ » (22/173)

• *Quand A avait 8 ans, B en avait 12, mais quand B avait 9 ans A avait $8 - 3 = 5$ ans et Christian avait 3 ans (car il y a 3 ans de différence entre le moment où B a 9 ans et le moment où il a 12 ans.*

Si A. a 10 ans, on a rajouté 5 ans de plus qu'au moment où il avait 5 ans.

Donc $3 + 5 = 8$ ans.

Ce qui fait que C a 8 ans quand A en a 10. (SR 501)

Une analyse plus fine de ces procédures fait apparaître souvent des ambiguïtés ou confusions ou erreurs:

• *Différence d'âge entre A et B : $12 - 9 = 3$ ans.*

Différence d'âge entre B et C: $8 - 5 = 5$ ans. Âge de C: $5 + 3 = 8$ (SR 529)

• *J'ai retiré 3 ans à B pour arriver à 9 ans et aussi à A et je suis arrivé à 5 ans pour A. Ainsi j'ai ajouté 4 ans à C et j'ai obtenu 8 ans pour C* (CA 502)

Parfois, la transposition est de +2 ans pour déterminer les 5 ans d'écart entre Antoine et Christian, avec l'opération finale $3 + 5 = 8$.

Ex 1. L'âge des frères (procédure C₂)

C₂. Procédure par « transposition » de + 2 ans, reconnaissables au « $14 - 6 = 8$ » (31/173)

- Quand A avait 10 ans, B avait 14 ans ($12 + 2 = 14$ ans), C avait 8 ans ($14 - 6 = 8$ ans) (SR 528)

- C a 8 ans quand A a 10 ans. $14 - 6 = 8$

Explication: Parce que B a 4 ans de plus que A donc pour que A a dix ans, il faut que B a 14 ans.

B a 6 ans de moins que C et donc quand B a 14 ans et A 10 ans, C a 8 ans. (FC 501)

Cette procédure est très « sûre », on n'observe pas d'ambiguïtés ni de confusions. Les explications témoignent d'une bonne maîtrise de la structure du temps, au delà de certaines maladresses verbales.

- *Nous sommes partis de 8 ans, l'âge de A en ajoutant 2 pour la donnée 10 puis nous avons fait la même chose avec l'âge de B et on a obtenu 14. Et puis nous avons soustrait en voyant que la différence d'âge entre B et C nous donne 6.*

Puis, de 14, nous avons enlevé le 6, c'est-à-dire l'âge de la différence entre B et C, ce qui nous a donné l'âge de C quand A avait 10 ans.

(Toutes les opérations sont présentes, par algorithmes en colonne) (CA406)

Ex 1. *L'âge des frères* (procédure C_3)

C_3 . Procédures calculant la différence d'âge entre C et A, reconnaissables souvent à l'opération « $10 - 2 = 8$ » (14/173)

- *C avait 98 ans quand A avait 10 ans.*

Explication: B et A ont 4 ans de différence. Mais puisque B avait 9 ans (donc -3) quand C avait 3 ans A avait 5 ans ($8 - 3 = 5$) et comme C avait 3 ans, ça fait $3 + 2 = 5$. Donc C et A avait 2 ans de différence. Alors $10 - 2 = 8$ ans. (avec les opérations en colonne $12 - 8 = 4$ $12 - 3 = 9$, $9 - 4 = 5$, $3 + 2 = 5$) (SR 517)

Les élèves les plus jeunes donnent des explications plus succinctes et font intervenir l'addition $3 + 3 = 6$

- *Quand A avait 10 ans, C avait 8 ans. $8 + 2 = 10$, $12 + 2 = 14$, $9 + 3 = 12$, $3 + 3 = 6$, $6 + 2 = 8$ (SR 402)*

- *On est retourné en arrière et avons découvert que C, quand A avait 10 ans, avait 8 ans (CA 505)*

- *Quand A avait 10 ans, C en avait 8. On a fait: $12 - 8 = 4$ A et B ont 4 ans de différence / $9 - 3 = 6$ B et C ont 6 ans de différence / $12 - 6 = 6$ Quand A avait 8 ans, C avait 6 ans / $8 - 6 = 2$ Ils ont 2 ans de différence / $10 - 2 = 8$ (SR 543)*

Ex 1. *L'âge des frères* (procédure D_1)

D_1 . Procédure « $3 + 2 = 5$ » où le terme « 2 » est la différence entre les deux âges d'Antoine: 8 et 10, reportée sur le seul âge indiqué pour Christian: 3 (41/173)

- *Explication:*
- | | | |
|-----------|--|-------|
| Antoine | | 8 ans |
| Christian | | 3 ans |

A a 8 ans et pour aller à 10 il faut 2. Alors $8 + 2 = 10$. Et c. a 3 ans et comme Antoine il faut 2 alors on rajoute 2 à 3 et ça fait 5. (FC 504)

Ces raisonnements ignorent que les deux données ne sont pas contemporaines, implicitement ou explicitement:

- *On a biffé Bernard. On a fait $8 + 2$ pour aller à 10 épis $3 + 2 = 5$* (SR 423)
- *On a éliminé Bernard et Bernard et on est resté avec C et A* (CA 303)

Plusieurs fois aussi, les trois âges sont indiqués, par addition des deux ans à Bernard également: A: 10, B: 14 et C : 5

Ex 1. *L'âge des frères* (procédure D_2)

D_2 . Procédure « $8 - 3 = 5$ », « $10 - 5 = 5$ » ou « $0 + 5 = 5$ » où intervient la différence de 5 ans entre les deux âges mentionnés d'Antoine et de Christian. (13/173)

• *A et C ont 5 ans de différence. A a 10 ans. C a 5 ans. Nous avons fait de la manière suivante: $10 - 5 = 5$.* (SR 313)

Les deux données considérées (à tort) comme contemporaines peuvent conduire à l'apparition d'un âge « 0 »

• *On a fait $8 - 3 = 5$. Quand A avait 5 ans, C n'était pas encore né. On a fait $5 + 5 = 10$. Donc C avait 5 ans quand A avait 10 ans parce que C avait 0 ans et A 5 ans. $0 + 5 = 5$* (SR 428)

• *A a 8 ans et 3 ans avant il a 5 ans. C a 3 ans et 3 ans avant il est pas né. A 5 ans plus tard il a 10 ans. B 5 ans plus tard il a 14 ans. C 5 ans plus tard il a 5 ans* (avec un tableau des âges des trois enfants aux deux périodes considérées (SR 416)

Ex 1. *L'âge des frères* (procédure E)

E (15). Procédures conduisant à d'autres erreurs que « 5 » (15/173)

Un groupe arrive à « 8 » mais par un chemin peu convainquant.

• *On a lu le texte et on a vu les années des frères puis on a fait $12 - 8$ et on a obtenu 4, puis nous avons additionné $4 + 3 = 7$. Après on a fait $9 - 8 = 1$. Enfin on a additionné $7 + 1 = 8$, qui sont les années de C.* (CA 412)

Dans cette dernière catégorie, l'erreur la plus fréquente est « 7 » (7 occurrences) dont deux sont semble-t-il dues à des imprécisions.

• En particulier, un tableau des âges respectifs de A, B, C, années après années commençant à 1 pour A, 4 pour B (au lieu de 5) et -2 pour C (au lieu de -1) se poursuivant par 2, 5, -1; 3, 6, 0; ... et se terminant par 10, 13 7 (SR 536)

Les autres erreurs sont difficiles à interpréter (non réponses, répétition des données, somme des quatre âges donnée, ...). Leur faible nombre (8) permet cependant de constater que la très grande majorité des groupes ont pu s'approprier le problème.

Ex 1. *L'âge des frères* (récapitulation)

Les procédures, par catégories: **3**: CE 2, **4**: CM1, **5**: CM2

	A	B	C ₁	C ₂	C ₃	D ₁	D ₂	E	
3	2 11	2 11	3 14	6 19	1 7	10 24	6 46	3 20	33 19
4	5 26	3 17	6 27	6 19	5 36	21 52	2 15	6 40	54 31
5	12 63	13 72	13 59	19 62	8 57	10 24	5 39	6 40	86 50
	19 11	18 10	22 13	31 18	14 8	41 24	13 7	15 9	173 100

Réussite globale (A, B, C₁, C₂, C₃) / Echec (D₁, D₂, E) **60 / 40**

En CE2 : **42 / 58** - En CM1 : **46 / 54** - En CM2 : **76 / 24**

Au-delà des procédures

- Une analyse comme celle-ci est déjà très riche en soi, dans l'interprétation des copies d'élèves, dans la répartition des procédures et leur inventaire.
- Elle permet encore de multiples observations annexes:
 - sur les méfaits de l'enseignement des algorithmes de calcul,
 - sur l'importance relative de la rigueur dans les écritures et les expressions mathématiques,
 - sur le langage de l'élève, les répétitions, les redondances,
 - sur l'évolution des explications d'un degré scolaire à l'autre,
 - sur les influences du maître dans l'organisation du plan de rédaction,
 - ...



Les limites dans l'interprétation des copies

- Le grand nombre de copies est une condition impérative, mais rend la tâche longue et lourde.
- il y a des zones d'ombres qu'une trace écrite ne suffit pas à éclairer,
- les élèves étant absents au moment de l'évaluation, on ne peut pas leur demander des précisions, souvent nécessaires,
- certaines copies ne peuvent pas refléter les discussions et interactions au sein du groupe, elles sont même parfois rédigées à la première personne du singulier, par celui qui « détient le crayon »,
- ...

Que faire de cette analyse ?



- Pour la formation des enseignants
 - en IUFM, en stages, en séances d'évaluation des copies d'élèves, ...
 - reproductions du problème dans plusieurs classes
 - réflexions sur les observations et procédures, sur l'insertion dans un parcours didactique, ...
- Pour les maîtres
 - en classe: problème, mise en commun, validation
 - réflexions personnelles, reproduction en agissant sur les variables didactiques ...
- Pour la recherche en didactique
 - mise à disposition des données
 - recherches sur la structuration espace/temps.



Pour les maîtres: le temps et la durée

- En quoi les différentes procédures relevées permettent-elles d'évaluer les niveaux de leurs élèves?
 - Peut-on hiérarchiser ces procédures?
 - Si oui, faut-il le faire?
- Faut-il « enseigner » les concepts de temps et de durée ou faut-il les laisser mûrir naturellement?
 - Institutionnalisation?
 - Mise en place de « parcours didactique »?
- Quand ces concepts seront-ils importants dans la carrière scolaire des élèves?
 - A quel moment figurent-ils dans les programmes?