Concours contrôleur des douanes session 2019

Concours pilote d'avion des douanes

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

- **L'usage de la calculatrice est interdit,**
- **Tous les exercices devront être traités,**
- **Chaque réponse devra être rigoureusement justifiée et devra être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte.**

Exercice 1

On définit la suite (u_n) par :

- son terme initial $u_0 = 1$;
- la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3

2. Soit la fonction h définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$$

et $(\mathscr{H})$ sa courbe représentative.

a. Étudier la fonction h.
Tracer $(\mathscr{H})$ et la droite (d) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; (l'unité graphique sera 1 cm).

b. Construire à l'aide de $(\mathscr{H})$ et de (d) les points de l'axe $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3

c. Que peut-on prévoir quant à la convergence de la suite (u_n) ?

3. (v_n) est la suite définie pour tout n par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}.$$

a. Calculer v_0, v_1, v_2.

b. Montrer que (v_n) est une suite géométrique que l'on caractérisera.

c. Exprimer v_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers plus l'infini.

4. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers plus l'infini.

Exercice 2

Un jeu consiste à extraire, au hasard et simultanément, 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 5 boules noires.
Si le joueur obtient 3 boules rouges, évènement que l'on note R_3, il gagne 500 euros.
S'il obtient 2 boules rouges et 1 boule noire, évènement que l'on note R_2, il gagne 300 euros.
Enfin, s'il obtient strictement moins de 2 boules rouges il ne gagne rien, on note cet évènement E.

1. Montrer que les probabilités des évènements R_2 et R_3 sont $p(R_2) = \dfrac{5}{12}$ et $p(R_3) = \dfrac{1}{12}$.

2. On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.
Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

Dans cette question, on modifie les règles du jeu de la façon suivante :

— Si le joueur réalise les évènements R_3 ou R_2 il ne gagne plus d'argent immédiatement mais est qualifié pour la suite du jeu que l'on appelle « Banco ».

— Si l'évènement E est réalisé le joueur ne gagne rien et n'est pas qualifié pour le « Banco ».

Le « Banco » consiste à extraire une boule parmi les sept restées dans l'urne ; si celle-ci est noire le joueur empoche les 1 000 euros du « Banco » et si elle est rouge le joueur a perdu mais repart avec une prime de « consolation » de 200 euros.

3. **a.** Quelle est la probabilité d'empocher les 1 000 euros du « Banco » sachant que R3 est réalisé ?

b. Quelle est la probabilité d'empocher les 1 000 euros du « Banco » sachant que R2 est réalisé ?

c. En déduire la probabilité d'empocher les 1 000 euros du « Banco ».

On note Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur dans ce nouveau jeu. Y peut donc prendre les valeurs 0, 200 ou 1 000.

d. Établir la loi de probabilité de Y.

e. Calculer l'espérance mathématique de Y et comparer avec celle de X.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x),$$

$\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Démontrer que f est 2π–périodique.

b. Étudier la parité de f.

c. Justifier que l'on peut restreindre l'intervalle d'étude de f à $[0\,;\,\pi]$.

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f

b. En déduire que, pour tout réel $x \in [0\,;\,\pi]$, $f'(x) = -\sin x(1+2\cos x)$.

3. Résoudre l'équation $\sin x(1+2\cos x) = 0$ sur $[0\,;\,\pi]$.

4. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$.

5. En déduire le tableau de variation de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Exercice 4

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$$

et (Γ) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(Unité de longueur : 1 cm).

1. Étudiez les variations de g. Déduisez-en le signe de $g(x)$.
2. Démontrez que la droite (Δ) d'équation $y = -x+1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de plus l'infini.
3. Tracez (Γ) et (Δ) sur le même graphique.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right).$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$(Unité de longueur : 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées).

1. **a.** En remarquant que $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{e}^x}$, calculez $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   Qu'en déduisez-vous pour la courbe $(\mathscr{C})$? (C) ?

   b. En remarquant que $f(x) = \left(1+\mathrm{e}^x\right)\dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{1+\mathrm{e}^x}$, calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   Qu'en déduisez-vous pour la courbe $(\mathscr{C})$?
2. Démontrez que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x).$$

3. Dressez le tableau de variations de f
4. Tracez la courbe $(\mathscr{C})$.

Exercice 5

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

On donne $1+\mathrm{e}^{-2} \approx 1,14$.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Partie A

1. Tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Interpréter graphiquement $g(2)$.

   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. **a.** Soit x un réel supérieur à 2.

   Montrer que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant x-2$.

   En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que, pour tout réel t, $f(t)=(t-1)\mathrm{e}^{-t}+1$.

1. Montrer que la fonction h définie par $h(t)=-t\mathrm{e}^{-t}$ est une primitive sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ de la fonction $t \longmapsto (t-1)\mathrm{e}^{-t}$.
2. En déduire que, pour tout réel x, $g(x)=x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.
3. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.