

∞ Concours contrôleur des douanes session 2015 ∞

Branche aéronautique : pilote d'avion

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

- L'usage de la calculatrice est interdit,
- Tous les exercices devront être traités,
- Chaque réponse devra être rigoureusement justifiée et devra être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^3 e^x.$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
(On rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^3 e^x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.)
2. Étudier les variations de f . Dresser son tableau de variation.
3. Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.
 - a. Donner l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
 - b. Donner l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse -3 .
 - c. Dédurre de la limite de $f(x)$ en $-\infty$ que \mathcal{C} admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote?
 - d. Préciser la position de \mathcal{C} par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.
4. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x.$$

- a. Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .
- b. Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -3$.
Calculer \mathcal{A} . (\mathcal{A} sera exprimée en unités d'aire u. a.). On rappelle qu'une aire est positive.

Exercice 2

Une urne contient $n + 8$ boules : n boules noires (n étant un entier au moins égal à deux) et huit boules blanches.

Tous les tirages effectués sont supposés équiprobables.

On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée il gagne un euro, mais pour chaque noire il perd deux euros.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Dans cette question, le jeu consiste à effectuer deux tirages successifs avec remise : le joueur tire une première boule de l'urne, il la remet dans l'urne, puis il effectue un deuxième tirage.
 - a. Montrer que le joueur peut, soit gagner deux euros, soit perdre un euro, soit perdre quatre euros.
 - b. Calculer, en fonction de n , la probabilité correspondant à chacun des cas.
 - c. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque jeu le gain (positif ou négatif) réalisé à l'issue des deux tirages. Calculer, en fonction de n , l'espérance mathématique de X .
Y a-t-il une valeur de n pour laquelle cette espérance est nulle? Si oui, la donner.
2. Dans cette question, n est fixé égal à 6 (il y a donc 6 boules noires et 8 blanches dans l'urne).
Le joueur tire maintenant trois boules simultanément et il n'effectue qu'un seul tirage.
 - a. Montrer qu'il peut, soit gagner trois euros, soit perdre six euros, soit perdre trois euros, soit ne rien gagner ni ne rien perdre.
 - b. Calculer la probabilité correspondant à chaque cas. Les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

Exercice 3

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur l'ensemble des entiers naturels n non nuls par :

$$\begin{cases} u_n &= \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right) \\ v_n &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}. \end{cases}$$

1. Démontrer que (v_n) converge vers 0,5.
2. On souhaite démontrer que la suite (u_n) converge.
 - a. f , g et h sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) &= x - \sin x, \\ g(x) &= -1 + \cos x + \frac{x^2}{2} \\ \text{et } h(x) &= -x + \sin x + \frac{x^3}{6}. \end{cases}$$

Démontrer que ces trois fonctions ne prennent que des valeurs positives ou nulles sur $[0; +\infty[$. (Utiliser les variations de ces fonctions.)

- b. Justifier que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)

Déduire de l'étude des fonctions f et h faite au a. que pour tout entier naturel n non nul on a l'inégalité

$$v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n.$$

- c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite?

Exercice 4

Une usine fabrique des pièces dont 1 % sont défectueuses.

Après fabrication, chaque pièce, bonne ou défectueuse, est envoyée à un service de contrôle.

Le contrôle s'effectue de la manière suivante :

- sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,97;
- sachant qu'une pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 0,99.

1.
 - a. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée?
 - b. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée?
 - c. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle?
2. Si l'on effectue cinq contrôles de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle? (On pourra donner le résultat sous la forme d'un produit de puissances de nombres réels)

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

On donne les valeurs approchées au centième près par défaut suivantes :

$$\ln 2 \approx 0,69 \quad ; \quad \ln 3 \approx 1,09.$$

1. Étudier les variations de f .
2. À l'aide des valeurs $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ (approchées si besoin), tracer dans un repère orthonormal la courbe \mathcal{C} représentative de f , restreinte à l'intervalle $[0; 2]$.
Tracer dans ce même repère la droite D d'équation $y = x$, restreinte à l'intervalle $[0; 2]$.
Placer le point A de coordonnées $(u_0; 0)$.
Construire les points de l'axe des abscisses d'abscisses respectives u_1 , u_2 , u_3 et u_4 en laissant les traits de construction apparents.
3. Que peut-on prévoir pour le comportement de la suite (u_n) ?
4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
5. Étudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

Montrer que pour tout réel x strictement positif on a :

$$0 < \ln(1 + x) < x.$$

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

6. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge et que sa limite est 0.