∽ Concours contrôleur des douanes session 2015 ∽

Concours pilote d'avion des douanes

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– - L'usage de la calculatrice est interdit, – Tous les exercices devront être traités, – Chaque réponse devra être rigoureusement justifiée et devra être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3\mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
   (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left|x^3\mathrm{e}^x\right| = \lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$.)
2. Étudier les variations de f. Dresser son tableau de variation.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.
   a. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse O.
   b. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3.
   c. Déduire de la limite de $f(x)$ en $-\infty$ que $\mathscr{C}$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Quelle est cette asymptote ?
   d. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$.
4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\mathrm{e}^x.$$

   a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -3$.
   Calculer $\mathscr{A}$. ($\mathscr{A}$ sera exprimée en unités d'aire u. a.). On rappelle qu'une aire est positive.

Exercice 2

Une urne contient $n + 8$ boules : huit boules blanches et n boules noires (n étant un entier au moins égal à deux).
Tous les tirages effectués sont supposés équiprobables.
On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. Pour chaque boule blanche tirée il gagne un euro, mais pour chaque noire il perd deux euros.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Dans cette question, le jeu consiste à effectuer deux tirages successifs avec remise : le joueur tire une première boule de l'urne, il la remet dans l'urne, puis il effectue un deuxième tirage.

a. Montrer que le joueur peut, soit gagner deux euros, soit perdre un euro, soit perdre quatre euros.

b. Calculer, en fonction de n, la probabilité correspondant à chacun des cas.

c. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque jeu le gain (positif ou négatif) réalisé à l'issue des deux tirages. Calculer, en fonction de n, l'espérance mathématique de X.

Y a-t-il une valeur de n pour laquelle cette espérance est nulle ? Si oui, la donner.

2. Dans cette question, n est fixé égal à 6 (il y a donc 6 boules noires et 8 blanches dans l'urne).

Le joueur tire maintenant trois boules simultanément et il n'effectue qu'un seul tirage.

a. Montrer qu'il peut, soit gagner trois euros, soit perdre six euros, soit perdre trois euros, soit ne rien gagner ni ne rien perdre.

b. Calculer la probabilité correspondant à chaque cas. Les résultats seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

Exercice 3

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur l'ensemble des entiers naturels n non nuls par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+\sin\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\ldots+\sin\left(\dfrac{n}{n^2}\right) \\ v_n & = & \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}. \end{array}\right.$$

1. Démontrer que (v_n) converge vers 0,5.

2. On souhaite démontrer que la suite (u_n) converge.

a. f, g et h sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x-\sin x, \\ g(x) & = & -1+\cos x+\dfrac{x^2}{2} \\ \text{et } h(x) & = & -x+\sin x+\dfrac{x^3}{6}. \end{array}\right.$$

Démontrer que ces trois fonctions ne prennent que des valeurs positives ou nulles sur $[0\,;\,+\infty[$. (Utiliser les variations de ces fonctions.)

b. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $1^3+2^3+\ldots+n^3 \leqslant n^4$. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)

Déduire de l'étude des fonctions f et h faite au a. que pour tout entier naturel n non nul on a l'inégalité

$$v_n-\frac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 4

Une usine fabrique des pièces dont 1 % sont défectueuses.
Après fabrication, chaque pièce, bonne ou défectueuse, est envoyée à un service de contrôle.
Le contrôle s'effectue de la manière suivante :

— sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de $0,97$;

— sachant qu'une pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de $0,99$.

1. **a.** Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée ?
   c. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle ?
2. Si l'on effectue cinq contrôles de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ? (On pourra donner le résultat sous la forme d'un produit de puissances de nombres réels)

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
On donne les valeurs approchées au centième près par défaut suivantes :

$$\ln 2 \approx 0,69 \quad ; \quad \ln 3 \approx 1,09.$$

1. Étudier les variations de f.
2. À l'aide des valeurs $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ (approchées si besoin), tracer dans un repère orthonormal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f, restreinte à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   Tracer dans ce même repère la droite D d'équation $y = x$, restreinte à l'intervalle $[0\,;\,2]$.
   Placer le point A de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$.
   Construire les points de l'axe des abscisses d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4 en laissant les traits de construction apparents.
3. Que peut-on prévoir pour le comportement de la suite (u_n) ?
4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
5. Étudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

   $$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

   Montrer que pour tout réel x strictement positif on a :

   $$0 < \ln(1+x) < x.$$

   En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
6. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge et que sa limite est 0.