

Durée : 1 heure 30

œ Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH œ
6 mai 2009

Exercice 1

8 points

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu à la page 3

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

Soit \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthogonal, l'unité sur l'axe des abscisses étant de 1 cm et sur l'axe des ordonnées de 2 cm.

1.
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
 - b. En déduire que \mathcal{C}_n admet une asymptote Δ_n , au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation.
2.
 - a. Déterminer $f'_n(x)$, pour $x \in [0 ; +\infty[$, où f'_n désigne la dérivée de f_n .
 - b. Dresser le tableau des variations de f_n .
Préciser les valeurs de $f_n(0)$, $f'_n(0)$ et $f_n(n)$.
3. La fonction f_2 est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f_2(x) = x^2 e^{-x}$.
 - a. Tracer la courbe \mathcal{C}_2 représentative de f_2 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthogonal donné.
 - b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection B_1 et B_2 des courbes \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .
 - c. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe \mathcal{C}_n passe par les deux points B_1 et B_2 .
4.
 - a. Donner la valeur exacte de l'intégrale : $J = \int_0^2 e^{-x} dx$.
On indiquera les calculs intermédiaires.
 - b. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $K = \int_0^2 x e^{-x} dx$.
On indiquera les calculs intermédiaires et on donnera la valeur exacte de l'intégrale.
 - c. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer, en fonction de K , l'intégrale : $I = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx$.
On indiquera les calculs intermédiaires.
 - d. On note \mathcal{Q} la partie de plan délimitée par les axes du repère, la courbe \mathcal{C}_2 et la droite d'équation $x = 2$.
Donner une valeur approchée à 10^{22} près de l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ de la partie \mathcal{Q} , en unités d'aire, puis en cm².
 - e. Hachurer la partie \mathcal{Q} sur le graphique de la question 3. a.

EXERCICE 2

4 points

Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera **sa valeur exacte**, écrite sous forme de **fraction irréductible**.

Dans une classe de terminale S, comprenant 39 élèves, on relève les voeux d'orientation suivants :

30 élèves veulent faire des études scientifiques dont 22 envisagent des études longues.
 6 élèves souhaitent s'engager dans des études de droit dont 2 envisagent des études courtes.

3 élèves veulent faire des études d'arts (études longues).

Toutes les filles veulent faire des études longues.

Il y'a autant de filles que de garçons qui souhaitent faire des études scientifiques.

Il y'a autant de filles que de garçons qui souhaitent faire des études de droit.

Un seul garçon envisage de s'engager dans des études d'arts.

1. Compléter le tableau à l'aide des informations données en hypothèse.
2. On interroge un élève pris au hasard dans la classe.
 - a. Donner la probabilité $P(F)$ que l'élève interrogé soit une fille et la probabilité $P(G)$ que ce soit un garçon.
 - b. Sachant que l'élève interrogé veut faire des études longues, quelle est la probabilité P_1 que ce soit une fille qui envisage de faire des études scientifiques?
 - c. Sachant que l'élève interrogé n'envisage pas de faire des études scientifiques, quelle est la probabilité P_2 qu'il se destine à des études d'arts ou envisage des études courtes?
3. Deux filles et un garçon sortent de la classe.
 - a. Quelle est la probabilité Q_1 que ce soit trois élèves qui envisagent des études scientifiques?
 - b. Quelle est la probabilité Q_2 qu'il y'ait au moins un élève envisageant des études d'arts?

EXERCICE 3

8 points

On se place dans le plan rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthomormé, direct.

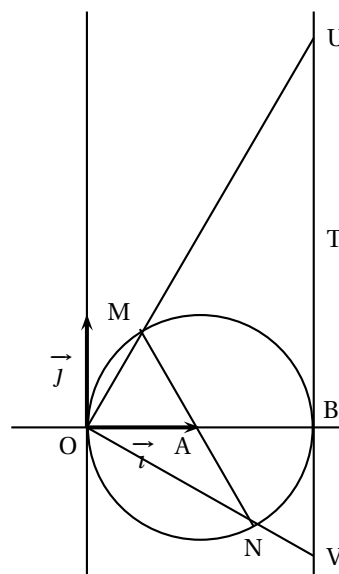
Soit A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 2.

On considère le cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon 1 et la droite T, tangente à \mathcal{C} en B, d'équation $x = 2$.

Pour tout réel φ vérifiant $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, on pose :

$$z_\varphi = (\cos(\varphi) + 1) + i\sin(\varphi)$$

On désigne par M_φ le point du plan d'affixe z_φ .



1. Où se trouve le point M_φ lorsque : $\varphi = -\pi$? $\varphi = \pi$? $\varphi = 0$?
2. Soit $\varphi \in]-\pi ; \pi[$.
 - a. Déterminer, en fonction de φ , l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM_\varphi}$.
 - b. Justifier que M_φ appartient au cercle \mathcal{C} .

3. Pour la suite de l'exercice, on pose : $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

On désigne par M le point d'affixe : $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On note N le point du cercle \mathcal{C} diamétralement opposé au point M (N est le symétrique de M par rapport à A).

Déterminer l'affixe Z du point N .

4. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice \mathcal{D} du segment $[MN]$.
5. On considère U le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente T et V le point d'intersection de la droite (ON) et de la tangente T .
 - a. Déterminer l'affixe u du point U et l'affixe v du point V .
 - b. Déterminer l'affixe k du milieu K du segment $[UV]$.
 - c. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[UV]$.
6.
 - a. Déterminer l'affixe ω du point Ω d'intersection des droites \mathcal{D} et Δ .
 - b. Tracer les droites \mathcal{D} et Δ ainsi que le cercle \mathcal{C}' de centre Ω passant par M .

Quels sont les trois points cités dans cet exercice, autres que M , qui appartiennent à ce cercle \mathcal{C}' ?