

Durée : 1 heure 30
Épreuves communes ENI-GEIPI-POLYTECH
Série STI2D et STL Mercredi 13 mai 2015
SUJET DE MATHÉMATIQUES

Il faut choisir et réaliser seulement **trois des quatre exercices** proposés

EXERCICE I

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = 2\sqrt{3} - 2i \quad \text{et} \quad z_B = iz_A.$$

1. Donner la forme algébrique de z_B .
2. **a.** Déterminer les modules respectifs $|z_A|$ et $|z_B|$ de z_A et z_B . Détailler le calcul.
b. Donner les longueurs OA et OB.
3. Tracer le triangle OAB sur la figure.
4. **a.** Déterminer un argument $\arg(z_A)$ de z_A . Détailler le calcul.
b. Déterminer un argument $\arg(z_B)$ de z_B . Justifier le résultat.
c. En déduire une mesure des angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OB})$.
5. Donner la nature précise du triangle OAB. Justifier la réponse.
6. On considère le milieu K du segment [AB].
a. Déterminer l'affixe z_K de K. Justifier le calcul.
b. Placer le point K sur la figure de la question 3.
7. On note C le point tel que OACB soit un parallélogramme.
a. Tracer le parallélogramme OACB sur la figure de la question 3.
b. Déterminer l'affixe z_C de C. Justifier la réponse.
c. Donner la nature précise du parallélogramme OACB. Justifier la réponse.

EXERCICE II

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x, \quad f(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

1. **a.** Donner $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
b. On en déduit que \mathcal{C}_f admet deux asymptotes, notées Δ_1 et Δ_2 .
Donner leurs équations respectives.
2. **a.** f' désigne la dérivée de f .
Justifier que, pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$.
b. Dresser le tableau des variations de f .
3. **a.** Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
b. Déterminer une équation de la tangente T_0 à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

4. Tracer les droites Δ_1 , Δ_2 , T_0 puis la courbe \mathcal{C}_f .

Partie B

On considère les intégrales I et J définies par

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{e^{2x} + 1} dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx.$$

1. On considère les fonctions h et H définies par :

$$\text{pour tout réel } x, h(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \quad \text{et} \quad H(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1).$$

- Justifier l'égalité : $\frac{e^2 + 1}{e^{-2} + 1} = e^2$.
 - Justifier que H est une primitive de h .
 - Déduire des questions précédentes que $J = 1$. Détailler le calcul.
- Calculer la somme $I + J$. Détailler le calcul.
 - En déduire la valeur de I .
 - Hachurer, sur la figure de la question A 4., le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut I .

EXERCICE III

La victoire de l'équipe féminine espagnole, le 2 août 2013, aux championnats du monde de water-polo a été fortement médiatisée en France. Il s'ensuivit une forte augmentation du nombre de filles licenciées dans tous les clubs français de water-polo à partir de septembre 2013.

Au 1^{er} septembre 2013, les clubs français de water-polo comptaient 4 500 filles licenciées.

L'évolution du nombre de filles licenciées est modélisée par une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

u_0 représente le nombre de filles licenciées, exprimé en milliers, au 1^{er} septembre 2013. Ainsi $u_0 = 4,5$.

Pour tout $n \geq 1$, u_n représente le nombre de filles licenciées, exprimé en milliers, n mois plus tard.

Ainsi u_1 désigne le nombre de filles licenciées au 1^{er} octobre 2013, u_2 désigne le nombre de filles licenciées au 1^{er} novembre 2013, etc.

On constate que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\text{pour tout entier } n, \quad u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

- Donner le nombre de filles licenciées à chacune des dates suivantes : au 1^{er} octobre 2013, au 1^{er} novembre 2013 et au 1^{er} décembre 2013.
 - p_1 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1^{er} septembre et le 1^{er} octobre 2013.
 p_2 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1^{er} octobre et le 1^{er} novembre 2013.
 p_3 désigne le pourcentage d'augmentation du nombre de filles licenciées entre le 1^{er} novembre et le 1^{er} décembre 2013.
Donner les valeurs approchées à 10^{-2} près de p_1 , p_2 et p_3 .
- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout entier n , $v_n = 10 - u_n$.
 - Donner la valeur de v_0 .

- b. Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.
Détailler le calcul.
- c. Exprimer, pour tout entier n , v_n en fonction de n .
3. Justifier alors que, pour tout entier n , $u_n = 10 - 5,5 \times 0,8^n$.
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Justifier la réponse.
5. a. Déterminer la plus petite valeur n_0 de l'entier n tel que : $5,5 \times 0,8^n \leq 1$.
Justifier soigneusement la réponse.
- b. À quelle date le nombre de filles licenciées dans les clubs français de water-polo aura-t-il doublé par rapport à celui du 1^{er} septembre 2013?
Justifier soigneusement votre raisonnement.

EXERCICE IV

Dans tout l'exercice, pour chaque probabilité ou chaque pourcentage demandé, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie A

Une étude sur tous les nageurs français de haut niveau a montré que leur taille, mesurée en centimètres, pouvait être représentée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $m = 190$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

On choisit au hasard un nageur français de haut niveau.

1. Donner la probabilité P_1 que ce nageur mesure plus de 195 cm.
2. Donner la probabilité P_2 que ce nageur mesure moins de 180 cm.
3. Donner la probabilité P_3 que ce nageur mesure entre 180 cm et 195 cm.

Partie B

Le tableau ci-dessous donne la taille, en centimètres, et le poids, en kilogrammes, d'un échantillon de 14 nageurs français de haut niveau. La taille et le poids de chaque nageur sont arrondis à une unité près.

Nom	Agnel	Bernard	Bousquet	Coelho	Giot	Horth	Joly
Poids (en kg)	90	90	86	74	85	80	70
Taille (en cm)	200	196	188	182	198	185	188
Nom	Lacourt	Lefert	Leveaux	Manaudou	Ress	Sauvage	Steimetz
Poids (en kg)	85	68	92	99	78	82	83
Taille (en cm)	200	185	202	199	183	184	191

1. Donner le poids moyen m_p et la taille moyenne m_t des nageurs de cet échantillon.
2. Donner le pourcentage Q_1 de nageurs de cet échantillon qui mesurent entre 186 cm et 190 cm.
3. Donner le pourcentage Q_2 de nageurs de cet échantillon qui pèsent plus de 91 kg.
4. Donner le pourcentage Q_3 de nageurs de cet échantillon qui pèsent moins de 91 kg et mesurent plus de 186 cm.

Partie C

On considère maintenant la population totale des nageurs français ayant une licence de natation. On suppose que la probabilité qu'un nageur, choisi au hasard dans cette population, pèse plus de 91 kg est égale à 0,3.

Un entraîneur doit constituer, pour une compétition amicale, une équipe de 10 nageurs. Pour cela, il choisit au hasard 10 nageurs dans la population décrite ci-dessus. On suppose que cette population est suffisamment importante pour que les choix des nageurs puissent être supposés indépendants les uns des autres. On note Y la variable aléatoire représentant, parmi les 10 nageurs choisis, le nombre de nageurs pesant plus de 91 kg.

1. Y suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Donner la probabilité R_1 que l'équipe ne contienne aucun nageur pesant plus de 91 kg.
3. Donner la probabilité R_2 que l'équipe contienne au moins un nageur pesant plus de 91 kg.