

**EXERCICE 1**

**7 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant sur la grille prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée +1 point. Toute réponse fautive est comptée -0,5 point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Réponses : 1 : D ; 2 : C ; 3 : A ; 4 : D ; 5 : C ; 6 : B ; 7 : B

**QCM 1 :**

Soit la fonction  $h$  définie pour tout réel  $x$  par  $h(x) = e^{-x} - x + 4$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $h$  :

Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = -e^{-x} - 1$ . Ce qui exclut A.

Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ . Ce qui exclut B.

On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x + 4 = +\infty$ .

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - x + 4 = -\infty$ .

Ces deux résultats excluent C... Reste D (  $h$  fonction continue strictement monotone sur  $\mathbb{R}$  avec  $h(x)$  qui décrit  $\mathbb{R}$  )

**QCM 2 :**

Dans l'ensemble des nombres réels, l'inéquation  $-2xe^{-x+1} \geq 0$  a pour ensemble de solutions...

Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x+1} > 0$  et  $-2xe^{-x+1} \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Réponse : C

**QCM 3 :**

On considère l'intégrale  $I = \int_1^e t^2 \ln(t) dt$ .

Calculons la dérivée de la fonction  $h$  définie sur  $[1; e]$  par  $h(t) = t^3 [3 \ln(t) - 1]$ .

On a  $h'(t) = 3t^2 (3 \ln(t) - 1) + 3t^2 = 9t^2 \ln(t)$ .

On en déduit :

$$I = \int_1^e t^2 \ln(t) dt = \frac{1}{9} \int_1^e h'(t) dt = \frac{1}{9} [h(t)]_1^e.$$

La valeur exacte de  $I$  est :  $I = \frac{2e^3 + 1}{9}$ . Réponse : A

**QCM 4 :**

Soit la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x \cos x$ .

La dérivée  $f'$  de  $f$  est définie pour tout réel  $x$  par :

$$f'(x) = -x \sin x + \cos x :$$

Réponse : D

**QCM 5 :** Soit la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x \cos x$ .

La primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(0) = 1$  est définie pour tout réel  $x$  par  $F(x) = \cos x + x \sin x :$

Il suffit de dériver la fonction de la réponse C

$$\text{QCM 6 : } I = \int_2^4 \frac{3x}{x^2-1} dx = \frac{3}{2} \int_2^4 \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{3}{2} [\ln(x^2-1)]_2^4 = \frac{3}{2} (\ln(15) - \ln(3))$$

D'où  $I = 1,5 \ln(5)$ .

Réponse : B

**QCM 7 :**

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par  $f(x) = \frac{-x^2 - 2 \ln x}{x} :$

$$\text{On a } f(x) = -x - 2 \frac{\ln x}{x}.$$

on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

On a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Réponse : B

## EXERCICE 2

7 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant sur la grille prévue à cet effet.

Toute réponse juste est comptée +1 point. Toute réponse fautive est comptée -0,5 point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

### QCM 8 :

On considère l'équation  $2z + \bar{z} = 9 + i$ . On pose  $z = x + iy$ . on a  $\bar{z} = x - iy$ , avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

$$2z + \bar{z} = 9 + i \Leftrightarrow 2(x + iy) + (x - iy) = 9 + i \Leftrightarrow 3x + iy = 9 + i \Leftrightarrow (x = 3 \text{ et } y = 1)$$

Réponse : C

### QCM 9 :

On considère la suite  $u$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence :  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  :

La forme de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  exclut A et B.

Raisonnons par récurrence sur  $n$ .

Considérons la proposition  $u_n < 3$ .

Initialisation : la proposition est vraie pour  $n = 0$ .

Hérédité : Si  $u_n < 3$  est vraie, alors  $\frac{1}{3}u_n + 2$  est vraie et  $u_{n+1} < 3$  est vraie.

Conclusion : Pour tout entier naturel  $n$ , d'après l'axiome de récurrence,  $u_{n+1} < 3$ . Et la suite  $u$  est majorée par 3.

Réponse : C

**QCM 10 :** On considère trois suites  $u$ ,  $v$ , et  $w$  qui vérifient la propriété suivante :

Pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n < v_n < w_n$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et comme  $w_n = u_n + \frac{1}{n}$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 2$ .

D'après le théorème d'encadrement par des limites, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 2$ .

Réponse : D

**QCM 11 :** Un sac contient 4 boules noires et 3 boules rouges. On tire successivement et sans remise 2 boules du sac.

Sachant que la première boule tirée est noire, il reste dans le sac 6 boules : 3 noires et 3 rouges ; la probabilité de la

seconde soit noire est  $\frac{1}{2}$

Réponse : C

### QCM 12 :

On lance un dé cubique bien équilibré et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de dé.

Soit les événements :

$I$  : "le numéro est inférieur ou égal à 3".  $I = \{1; 2; 3\}$  et  $p(I) = \frac{3}{6}$ .

$M$  : "le numéro est un multiple de 3".  $M = \{3; 6\}$  et  $p(M) = \frac{2}{6}$ .

$$I \cup M = \{1, 2, 3, 6\} \text{ et } P(I \cup M) = \frac{4}{6}.$$

$$I \cap M = \{3\} \text{ et } P(I \cap M) = \frac{1}{6}$$

$$P(I \cap M) = \frac{1}{6} \text{ et } p(I) \times p(M) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Réponse : D

### QCM 13 :

Une maladie frappe 2% de la population d'un pays. Pour dépister cette maladie, on utilise un test. On sait que :

— la probabilité que le test soit positif, sachant que l'individu est malade, est 0,9 ;

— la probabilité que le test soit négatif, sachant que l'individu n'est pas malade, est 0,9.

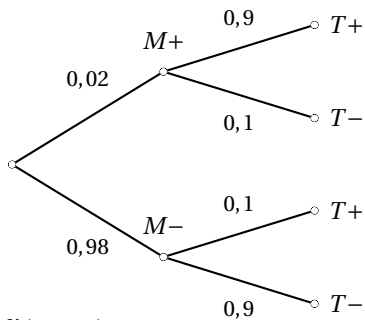
On note les événements :

$M+$  : "l'individu est malade"

$M-$  : "l'individu n'est pas malade"

$T+$  : "le test est positif"

$T-$  : "le test est négatif"



D'après l'énoncé :  $p_{M+}(T+) = 0,9 \neq 0,1$  ;

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T+) = p(M+) \times p_{M+}(T+) + p(M-) \times p_{M-}(T+) = 0,116.$$

Par définition des probabilités conditionnelles :

$$p_{T+}(M+) = \frac{p(M+ \cap T+)}{p(T+)} = \frac{0,02 \times 0,9}{0,116}.$$

On trouve à  $10^{-2}$  près  $p_{T+}(M+) = 0,16$ .

Réponse : C

#### QCM 14 :

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[2; 20]$ .

$$P_{X>6}(5 < X < 10) = \frac{p(6 < x < 10)}{p(X > 6)} = \frac{4}{20} \times \frac{20}{14} = \frac{2}{7}.$$

Réponse : C

## EXERCICE 3

6 points

Un essai thérapeutique est réalisé chez des patients atteints d'une maladie associée à une très forte mortalité. Les données de cet essai sont correctement ajustées par un modèle de survie exponentielle.

Soit  $X_A$  la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_A = 0,22$ .

$$C'est \ à \ dire \ P(X_A \leq t) = \int_0^t 0,22e^{-0,22x} dx.$$

Soit  $X_B$  la variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_B = 0,11$ .

$$C'est \ à \ dire \ P(X_B \leq t) = \int_0^t 0,11e^{-0,11x} dx.$$

$t$  représente le temps en années avec  $\geq 0$ .

Avec un traitement A, la probabilité de survie à l'instant  $t$  est égale à  $S_A(t) = P(X_A > t)$ .

Avec un traitement B, la probabilité de survie à l'instant  $t$  est égale à  $S_B(t) = P(X_B > t)$ .

Aide aux calculs  $e^{-2,2} \approx 0,111$  et  $\sqrt{0,111} \approx 0,333$ .

1. Calculons :  $P(X_A \leq 10)$ .

$$\text{On a : } P(X_A \leq 10) = \int_0^{10} -\lambda_A e^{-\lambda_A x} dx = \left[ -e^{-\lambda_A x} \right]_0^{10} = 1 - e^{-10\lambda_A}.$$

$$\text{Avec } \lambda_A = 0,22, P(X_A \leq 10) = 1 - e^{-2,2} = 1 - 0,111 = 0,889$$

2. Démontrons que pour tout réel  $t$  positif,  $S_A(t) = e^{-0,22t}$ .

L'événement " $X_A > t$ " est l'événement contraire de l'événement " $X_A \leq t$ ", on en déduit :

$$S_A(t) = P(X_A > t) = 1 - p(X_A \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda_A e^{-\lambda_A x} dx = 1 - \left[ -e^{-\lambda_A x} \right]_0^t = e^{-t\lambda_A}.$$

Et finalement :  $S_A(t) = e^{-0,22t}$ .

3. La fonction  $S_A$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  avec pour tout réel  $t, t \geq 0$  :  $S'_A(t) = -\lambda_A e^{-\lambda_A t} < 0$ .

$S_A$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

$$D'autre \ part \ S(0) = 1 \ \text{et} \ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \ \text{alors} \ \lim_{t \rightarrow +\infty} S_A(t) = 0$$

On en déduit le tableau de variation complet de la fonction  $S_A$ .

4. Calculons la probabilité de survie à 10 ans dans le cas du traitement B, c'est à dire  $S_B(10) = p(X_B > 10)$ .

On a en utilisant les calculs faits au 2 pour  $X_A$  :

$$S_B(10) = p(X_B > 10) = e^{-10\lambda_B} = e^{-1,1} = (e^{-2,2})^2 = \sqrt{0,111} = 0,333.$$

5. Calculons la probabilité de survie à 5 ans dans le cas du traitement A.

$$\text{On a } S_A(5) = e^{-1,1}$$

6. Le rapport de survie des traitements A et B est-il constant au cours du temps?

Calculons  $S_A(10)$ ; on a :  $S_A(10) = e^{-2,2}$

On a d'autre part  $S_B(5) = e^{-0,55}$ .

$$\text{On a : } \frac{S_A(5)}{S_B(5)} = e^{-0,55} \text{ et } \frac{S_A(10)}{S_B(10)} = e^{-1,1}.$$

Or  $-0,55 > -1,1$  et  $e^{-0,55} > e^{-1,1}$

On remarque que  $\frac{S_A(5)}{S_B(5)} > \frac{S_A(10)}{S_B(10)}$ . Le rapport de survie des traitements A et B n'est pas constant au cours du temps.

7. Pour  $t$  fixé, établissons la relation entre la survie dans le cas du traitement A et la survie dans le cas du traitement B.

On a :

$$\frac{S_A(t)}{S_B(t)} = \frac{e^{-0,22t}}{e^{-0,11t}} = e^{-0,11t}.$$