

∞ Concours d'entrée École de santé des armées 2013 ∞

1 EXERCICE 1

6 points

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmation A, B, C ou D est exacte. On demande au candidat de signaler sans justification la réponse qui lui paraît exacte en cochant sur la grille prévue à cette effet (voir Annexe)

Toute réponse juste est comptée +1 point. Toute réponse fautive est comptée -0,25 point.

Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Question n° 1 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{e^x}$ est égale à :

A : 2 B : $+\infty$ C : $+\infty$ D : 0

2. Question n° 2 : On considère une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur un intervalle I. On note u' sa fonction dérivée. On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à I par $f(x) = \ln(u(x))$.

A : On ne peut pas déterminer le sens de variation de f .

B : la fonction f est décroissante sur I.

C : la fonction f est croissante sur I.

D : la fonction f est croissante puis décroissante sur I.

3. Question n° 3 : Dans l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$

A : admet une unique solution.

B : admet exactement deux solutions.

C : admet une infinité de solutions.

D : n'admet aucune solution.

4. Question n° 4 : Dans une bibliothèque, on trouve 150 romans et 50 biographies. 40 % des écrivains de romans sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les deux cents ouvrages.

La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

A : 0,9 B : 0,475 C : 0,7 D : 0,3

5. Question n° 5 : On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$a = -1 + i$; $b = 2i$; $c = 2 - 2i$. Le triangle ABC est :

A : quelconque. B : isocèle en A. C : rectangle en A. D : rectangle en C.

6. Question n° 6 : On considère trois suite (u_n) , (v_n) , (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2}$ alors :

A : $\lim w_n = 0$ B : $\lim v_n = 2$ C : $\lim u_n = -1$ D : la suite (v_n) n'a pas de limite

2 EXERCICE 2

8 points

On considère la fonction f définie sur par

$$f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 1}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

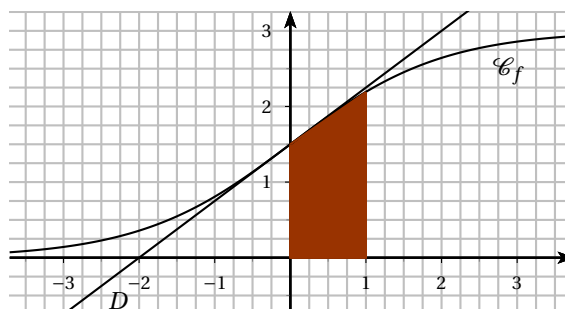
Dans le repère orthonormé unité 2 cm ci-dessous, la courbe \mathcal{C}_f tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $A\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

PREMIÈRE PARTIE

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire?
2. Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$.
3. Étudier le sens de variation de f sur puis dresser le tableau de variation complété des limites.
4. Déterminer une équation de la droite D .

DEUXIÈME PARTIE

1. Pour tout réel x , exprimer $F(x)$ en fonction de x .
2. Vérifier que $F(1) = 3 \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$
3. Sur le graphe ci-dessous, le domaine grisé est délimité par la courbe \mathcal{C}_f , les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
Calculer l'aire en unités d'aires de ce domaine.



3 EXERCICE 3

6 points

Une usine d'assemblage de pièces détachées possède 100 robots. On considère que chacun de ces robots a une probabilité de 0,1 d'être en panne. Le bon fonctionnement d'un robot est indépendant des autres robots. Soit X le nombre de robots en panne dans cette usine.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Justifier soigneusement. Donner l'expression de $P(X = k)$, pour tout $k \in \{0; \dots; 100\}$.
2. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

Pour la suite de l'exercice, on donne les valeurs des $P(X = k)$ et des $P(X \leq k)$ pour k variant de 0 à 20 arrondi à 10^{-5} près.

| k | $p(X = k)$ | $p(X \leq k)$ |
|-----|------------|---------------|
| 0 | 0,000 03 | 0,000 03 |
| 1 | 0,000 30 | 0,000 32 |
| 2 | 0,001 62 | 0,001 94 |
| 3 | 0,005 89 | 0,007 84 |
| 4 | 0,015 87 | 0,023 71 |
| 5 | 0,033 87 | 0,057 58 |
| 6 | 0,059 58 | 0,117 16 |
| 7 | 0,088 90 | 0,206 05 |
| 8 | 0,114 82 | 0,320 87 |
| 9 | 0,130 42 | 0,451 29 |
| 10 | 0,131 87 | 0,583 16 |
| 11 | 0,119 88 | 0,703 03 |
| 12 | 0,098 79 | 0,801 82 |
| 13 | 0,074 30 | 0,876 12 |
| 14 | 0,051 30 | 0,927 43 |
| 15 | 0,032 68 | 0,960 11 |
| 16 | 0,019 29 | 0,979 40 |
| 17 | 0,010 59 | 0,989 99 |
| 18 | 0,005 43 | 0,995 42 |
| 19 | 0,002 60 | 0,998 02 |
| 20 | 0,001 17 | 0,999 19 |

3. Quelle est la probabilité que dans un lot de 100 robots, il y ait au moins trois robots défectueux?
4. Déterminer au seuil de 95 % l'intervalle de fluctuation associé à la loi vérifiée par X .