Corrigés du baccalauréat ES/L 2015

L'intégrale d'avril 2015 à mars 2016

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Corrigé du baccalauréat ES/L – Pondichéry 16 avril 2015

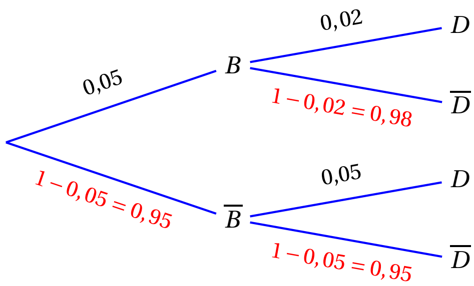
Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle
- B l'événement « la batterie est défectueuse » ;
- D l'événement « le disque dur est défectueux ».

On représente la situation décrite dans le texte par un arbre pondéré :



Proposition 1 – **Fausse**
La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à $0,08$ *à* $0,01$ *près.*

L'événement « le micro n'a ni problème de batterie ni problème de disque dur » est $\overline{B} \cap \overline{D}$.
D'après l'arbre : $P\left(\overline{B} \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}\left(\overline{D}\right) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025 \neq 0,08$

Proposition 2 – **Vraie**
La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.

On cherche $P(D)$. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(B \cap D) + P\left(\overline{B} \cap D\right) = 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05 = 0,0010 + 0,0475 = 0,0485$

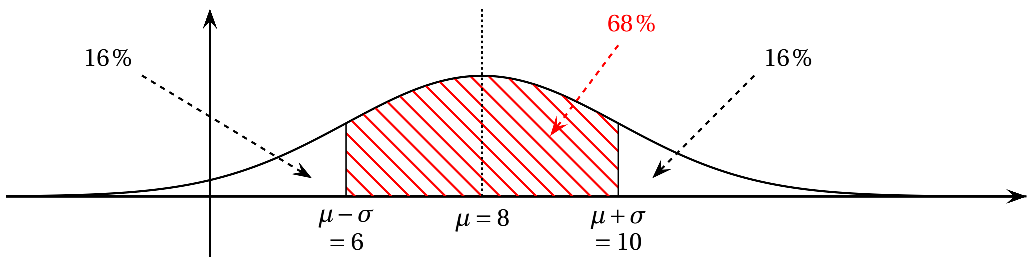
Proposition 3 – **Fausse**
Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à $0,02$.

On cherche $P_D(B)$: $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,05 \times 0,02}{0,0485} \approx 0,0206 > 0,02$

Partie B

Proposition 4 – **Vraie**
La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à $0,2$.

La variable aléatoire X qui donne l'autonomie de la batterie suit la loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart type $\sigma = 2$. On cherche $P(X \geqslant 10)$.
$\mu = 8$ et $\sigma = 2$ donc $10 = \mu + \sigma$.
D'après le cours, on sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$ et pour des raisons de symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, on peut déduire que $P(X \leqslant \mu - \sigma) = P(X \geqslant \mu + \sigma) \approx \dfrac{1 - 0,68}{2} \approx 0,16$.
Donc $P(X \geqslant 10) \approx 0,16 < 0,2$.



Partie C

Proposition 5 – **Fausse**

Ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $p = 0,98$ et $n = 1000$.

Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% donnant le pourcentage de clés USB conformes dans un échantillon de taille 1 000 est :

$$I = \left[0,98 - 1,96\frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1000}}\,;\, 0,98 + 1,96\frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1000}}\right] \approx [0,97\,;\,0,99]$$

Sur 1 000 clés, il y en a 50 de défectueuses donc la fréquence de clés conformes dans ce lot est $f = \dfrac{1000-50}{1000} = 0,95$. Or $f \notin I$, donc il faut remettre en question la communication de l'entreprise.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

1. **a.** On recopie et on complète le tableau correspondant à l'algorithme donné dans le texte :

Test $C < 400$		vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	300	326	350	372	392	411	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

   b. La valeur affichée en sortie d'algorithme est 5. Cela veut dire que pour l'année 5, c'est-à-dire en 2019, le nombre de colonies dépasse pour la première fois 400.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$.
   Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

   a. D'une année sur l'autre, l'apiculteur perd 8 % de colonies donc il en reste 92 %. De plus, il installe 50 nouvelles colonies chaque printemps donc le nombre de colonies l'année $n+1$ est le nombre de colonies l'année n multiplié par 0,92 auquel on va ajouter 50 :
   pour tout n, $C_{n+1} = 0,92 \times C_n + 50$

   b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$; donc $C_n = 625 - V_n$.
   $V_{n+1} = 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92 \times C_n - 50 = 575 - 0,92 \times (625 - V_n) = 575 - 575 + 0,92 \times V_n$
   $= 0,92 \times V_n$

   c. D'après la question précédente, on peut déduire que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 625 - C_0 = 325$.
   Donc, pour tout n, $V_n = V_0 \times q^n = 325 \times 0,92^n$.
   Comme $C_n = 625 - V_n$, on peut dire que, pour tout n, $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

   d. Le mois de juillet 2024 correspond à $n = 10$; l'apiculteur peut espérer posséder C_{10} colonies soit : $C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10} \approx 484$ colonies.

3. **a.** Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut atteindre au moins 600 colonies ; il suffit donc de remplacer dans l'algorithme la ligne « Tant que $C < 400$ faire » par la ligne « Tant que $C < 600$ faire ».

   b. On cherche une valeur de n pour laquelle $C_n \geqslant 600$:

$$C_n \geqslant 600 \iff 625 - 325 \times 0,92^n \geqslant 600 \iff 25 \geqslant 325 \times 0,92^n \iff \frac{25}{325} \geqslant 0,92^n$$
$$\iff \ln\left(\frac{25}{325}\right) \geqslant \ln\left(0,92^n\right) \iff \ln\left(\frac{25}{325}\right) \geqslant n \times \ln(0,92) \iff \frac{\ln\left(\frac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \leqslant n$$

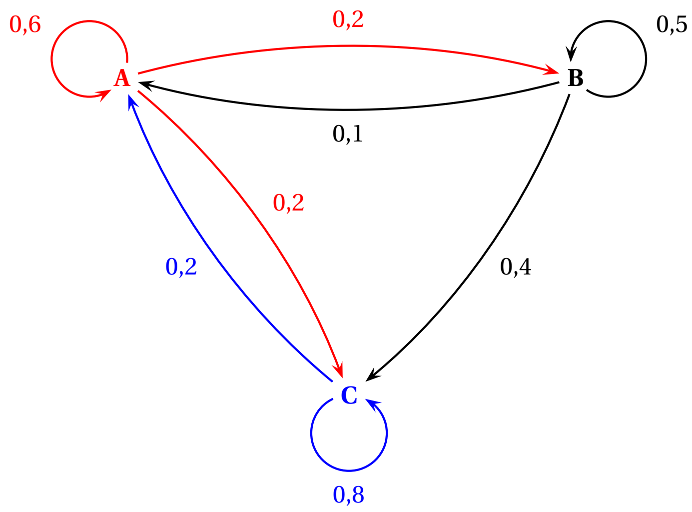
Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{25}{325}\right)}{\ln(0,92)} \approx 30,8$ donc au bout de 31 années, le nombre de colonies aura doublé.

Vérification : $C_{30} \approx 598$ *et* $C_{31} \approx 600$

Exercice 2 — 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets A, B et C :



2. Si a_n, b_n et c_n sont respectivement les nombres de visiteurs sur les sites A, B et C à l'instant $t = n$, d'après le graphe, on aura :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,6a_n + 0,1b_n + 0,2c_n \\ b_{n+1} &=& 0,2a_n + 0,5b_n + 0c_n \\ c_{n+1} &=& 0,2a_n + 0,4b_n + 0,8c_n \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8\end{pmatrix}$$

Donc la matrice de transition associée à ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8\end{pmatrix}$

On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68\end{pmatrix}$ et $M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{pmatrix}$.

3. $N_2 = N_1 \times M = N_0 \times M \times M = N_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36\end{pmatrix}$

   On peut donc dire que, lors de la deuxième minute, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4. $N_0 \times M^{20} = N_{20} \approx \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix}$

   On peut conjecturer que l'état stable est $\begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix}$.
   Ce que l'on peut vérifier simplement car $\begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} 31,25 & 12,5 & 56,25\end{pmatrix}$.
   À long terme, il y aura en moyenne 31,25 internautes connectés sur le site A, 12,5 sur le site B et 56,25 sur le site C.

5. À l'instant $t = 0$, le site C est infecté.

   a. La probabilité de passer du site C au site A en une minute est de 0,2; la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est donc égale à 0,2.

b. Pour qu'en deux minutes les trois sites soient infectés, il faut aller de C vers A puis vers B, ou de C vers B puis vers A.
C'est impossible d'aller de C vers B.
On va de C vers A avec une probabilité de 0,2 et de A vers B avec une probabilité de 0,2 ; on va donc de C vers A puis vers B avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.
La probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés est donc égale à 0,04.

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

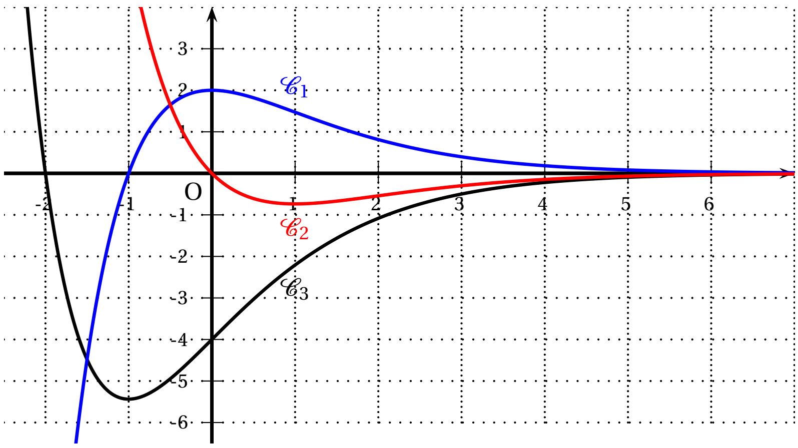
On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$

Partie A

1. $f(-1) = -2(-1+2)\,\mathrm{e}^{-(-1)} = -2\,\mathrm{e} \approx -5,44$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) = -2(1)\,\mathrm{e}^{-x} - 2(x+2)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-2+2x+4)\,\mathrm{e}^{-x} = 2(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$ sur $\mathbb{R}$.
   - Si $x < -1$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$;
   - Si $x > -1$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[-1\,;\,+\infty[$;
   - $f'(-1) = 0$ et f admet un minimum en -1 égal à $f(-1) = -2\,\mathrm{e}$.

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous, trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont été représentées.
L'une de ces courbes représente la fonction f, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.



On sait que sur un intervalle : f convexe $\iff$ f' croissante $\iff$ f'' positive
Il faut donc déterminer quelle fonction correspond à chacune des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

- La seule courbe qui corresponde aux variations de la fonction f est $\mathscr{C}_3$.
- La courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une fonction négative sur $]-\infty\,;\,-1[$ et positive sur $]-1\,;\,+\infty[$; c'est donc la courbe représentative de la fonction f' car la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$ et croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ est donc la représentation graphique de la fonction f''.

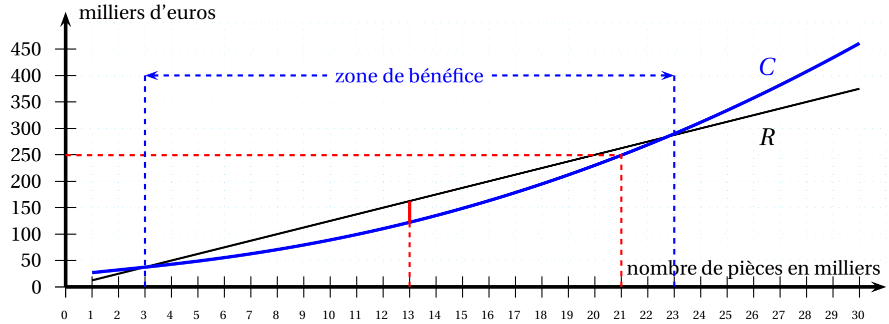
Pour déterminer la convexité de la fonction f, il suffit de regarder le signe de la fonction f'' : $f'' > 0$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

Exercice 4 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1\,;30]$.



1. On trouve le coût de production de 21 000 pièces en cherchant l'image du nombre 21 par la fonction C : le coût de production de 21 000 pièces est à peu près de 250 000 euros.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût de production, c'est-à-dire quand la fonction R est située au dessus de la fonction C : l'entreprise réalise un bénéfice pour une quantité de pièces produites comprise entre 3 000 et 23 000.
3. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand, sur l'intervalle $[3\,;23]$, l'écart entre la fonction R et la fonction C est le plus grand ; c'est autour de 13 donc le bénéfice est maximal pour une production de 13 000 pièces.

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1\,;30]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x\ln x$.

1. La fonction B est dérivable sur $[1\,;30]$ et
$B'(x) = -0,5(2x) + 6 + 2\ln x + 2x \times \dfrac{1}{x} = -x + 6 + 2\ln x + 2 = -x + 8 + 2\ln x$
2. On admet que $B''(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1\,;30]$.
On donne le tableau de variations de la fonction dérivée B' :

x	1	2	30
$B'(x)$	7	$6+2\ln 2$	$-22+2\ln 30$

$B'(1) = -1+8 = 7$; $B'(2) = -2+8+2\ln 2 = 6+2\ln 2 \approx 7,4 > 0$;
$B'(30) = -30+8+2\ln 30 = -22+2\ln 30 \approx -15,2 < 0$

- Sur $[1\,;2[$: $1 \leqslant x < 2 \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x} \leqslant 1 \iff 1 < \dfrac{2}{x} \leqslant 2 \iff 0 < -1 + \dfrac{2}{x} \leqslant 1 \Longrightarrow B''(x) > 0$ donc B' est strictement croissante.
- Sur $]2\,;30]$: $2 < x \leqslant 30 \iff \dfrac{1}{30} \leqslant \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2}{30} \leqslant \dfrac{2}{x} < 1 \iff -1 + \dfrac{2}{30} \leqslant -1 + \dfrac{2}{x} < 0 \Longrightarrow$ $B''(x) < 0$ donc B' est strictement décroissante.
- En $x = 2$, $B''(x) = 0$; la fonction B'' s'annule et change de signe donc la fonction B' admet un maximum égal à $B'(2) = 6 + 2\ln 2$.

3. **a.** On a vu que $B'(1) > 0$, $B'(2) > 0$ et $B'(30) < 0$; on complète le tableau de variations de B' :

x	1		2		α		30
$B'(x)$			$6+2\ln 2$				
		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	
	7						$-22+2\ln 30$

On peut en déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;30]$, et que cette solution est dans l'intervalle $]2\,;30[$.

b. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve successivement :

- $\left.\begin{array}{l} B'(13) \approx 0,13 > 0 \\ B'(14) \approx -0,72 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13;\,14]$
- $\left.\begin{array}{l} B'(13,1) \approx 0,045 > 0 \\ B'(13,2) \approx -0,04 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,1;\,13,2]$
- $\left.\begin{array}{l} B'(13,15) \approx 0,003 > 0 \\ B'(13,16) \approx -0,006 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,15;\,13,16]$
- $\left.\begin{array}{l} B'(13,153) \approx 0,0003 > 0 \\ B'(13,154) \approx -0,0005 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [13,153;\,13,154]$

Donc 13,153 est une valeur approchée de α au millième.

On peut également utiliser le solveur de la calculatrice.

4. On peut déduire des questions précédentes que :

- $B'(x) > 0$ sur $[1;\,\alpha[$
- $B'(x) < 0$ sur $]\,\alpha;\,30]$
- $B'(\alpha) = 0$

$B(1) = -0,5+6-20+2\ln 1 = -14,5$; $B(30) = -0,5\times 30^2+6\times 30-20+2\times 30\times \ln 30 = -290+60\ln 30$

D'où le tableau de variations de la fonction B :

x	1		α		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$			$B(\alpha)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-14,5$				$-290+60\ln 30$

5. L'entreprise réalise un bénéfice maximal quand $x = \alpha$ ce qui correspond à une production de 13 153 pièces, à l'unité près.

Ce bénéfice maximal vaut $B(\alpha)$.

Or $\alpha \in [13,153;\,13,154]$ et $B(13,153) \approx 40,20$ et $B(13,154) \approx 40,20$ milliers d'euros.

On peut donc dire que le bénéfice maximal, arrondi au millier d'euros, est de 40 000 €.

Retour à la liste des corrigés

∽ Corrigé du baccalauréat ES/L – Liban 27 mai 2015 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

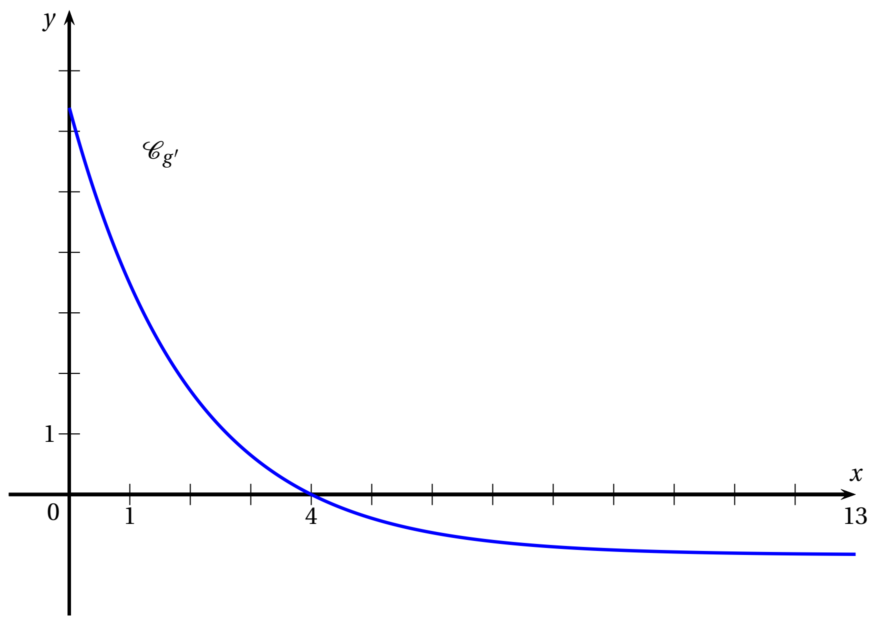
x	-3		-1		0		α		1
$f(x)$	-6	↗	-1	↘	-2	↗	0	↗	4

- Sur l'intervalle $[-3 ; 0]$, f admet un maximum -1 qui est atteint pour $x = -1$, $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cette intervalle.
- Sur l'intervalle $[0; 1]$, f est continue et strictement décroissante de plus 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appellera α.

En conséquence, $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[-3; 1]$.

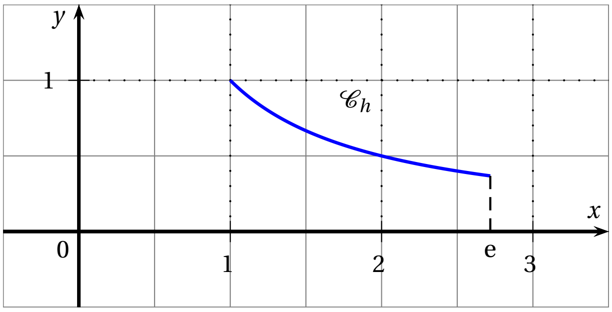
La proposition 1 est donc vraie.

2. Par lecture graphique : $g'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0; 4]$, la fonction g est donc croissante sur cet intervalle.
La proposition 2 est fausse.



Comme g' est décroissante sur l'intervalle $[0; 13]$, g est concave sur cet intervalle,
La proposition 3 est donc vraie.

3. On a :

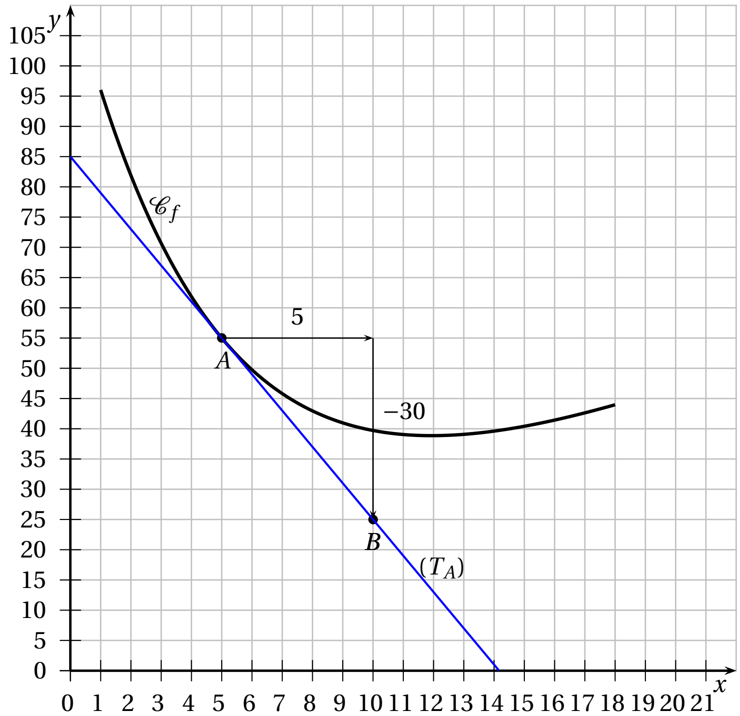


- $h(x) \geqslant 0$
- h est continue sur l'intervalle $[1\,;\,\text{e}]$.
- une primitive de h vaut : $H(x) = \ln x$. Et $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \frac{1}{x}\,\text{d}x = [H(x)]_1^{\text{e}} = \ln \text{e} - \ln 1 = 1$

La fonction h est bien une fonction de densité.
La proposition 4 est donc vraie.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** $f'(5)$ correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse A, c'est donc le coefficient directeur de la droite (AB).



Nous pouvons le lire graphiquement, voir ci-dessus.
Nous pouvons le calculer, $A(5\;;\;55)$ et $B(10\;;\;25)$, le coefficient directeur de la droite (AB) vaut :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{25-55}{10-5} = -\frac{30}{5} = -6.$$

b. f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1\,;\,18]$.

$$f'(x) = 2 + 40 \times \underbrace{(-0,2)}_{u'} \times \text{e}^{\overbrace{-0,2x+1}^{u}} = 2 - 8\text{e}^{-0,2x+1}$$

c. $f'(5) = 2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2\times 5+1} = 2 - 8\,\mathrm{e}^{0} = 2 - 8 = -6$, on retrouve bien le résultat de la partie **1.a.**.

2. **a.** Ici, nous travaillons avec des expressions qui sont définies sur tout $\mathbb{R}$, les équivalences seront toujours vraies.

$$\begin{aligned}
2 - 8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant 0 &\Leftrightarrow -8\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \geqslant -2\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,2x+1} \leqslant \frac{-2}{-8}\\
&\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{-0,2x+1} \leqslant \ln \frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow -0,2x+1 \leqslant -\ln 4\\
&\Leftrightarrow -0,2x \leqslant -\ln 4 - 1\\
&\Leftrightarrow -5\times(-0,2x) \geqslant -5\times(-\ln 4 - 1)\\
&\Leftrightarrow x \geqslant 5\ln 4 + 5)
\end{aligned}$$

b. Dans un premier temps, on constate que : $5\ln 4 + 5 \approx 11,93$ qui est bien compris dans $[1\,;\,18]$.
Et : $f(5\ln 4+5) \approx 38,86$, $f(1) \approx 96,02$ et $f(18) \approx 43,97$.

3. Par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal est à choisir parmi $f(11) \approx 39,05$ ou $f(12) \approx 38,86$, le coût sera donc minimal pour 12 parasols.

4. **a.** Il suffit de dériver F,
$F'(x) = 2x + 5 - 200\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} \times (-0,2) = 2x + 5 + 40\,\mathrm{e}^{-0,2x+1} = f(x)$.
F est bien une primitive de f.

b. $I = \displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_5^{15} = F(15) - F(5) = 15^2 + 5\times 15 - 200\,\mathrm{e}^{-3+1} - \left(5^2 + 5\times 5 - 200\,\mathrm{e}^{-1+1}\right)$
$= 300 - 200\,\mathrm{e}^{-2} - (-150) = 450 - 200\,\mathrm{e}^{-2}$

c. Rappel : la valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ vaut :$\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
ici : $\dfrac{1}{10}\,I = \dfrac{1}{15-5}\displaystyle\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.
C'est le calcul de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[5\,;\,15]$ et cette valeur moyenne vaut :

$$45 - 20\,\mathrm{e}^{-2} \approx 42,29$$

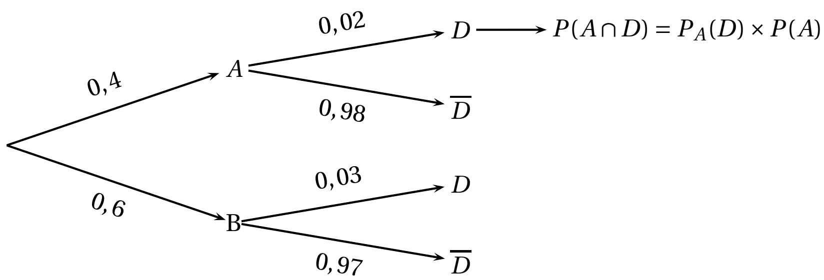
C'est le coût de production unitaire moyen.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** Voici l'arbre de probabilité :



b. Nous utilisons la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D)$
$P(D) = P(A)\times P_A(D) + P(B)\times P_B(D)$
$P(D) = 0,4\times 0,02 + 0,6\times 0,03$
$P(D) = 0,026$.

c. $P_D(A) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,4\times 0,02}{0,026} \approx 0,308$

2. **a.** Nous sommes dans le cas d'une expérience de Bernoulli (on a affaire à une médaille défectueuse ou non).
Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli.
Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre de médaille défectueuse, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 20$ et $p = 0,026$.

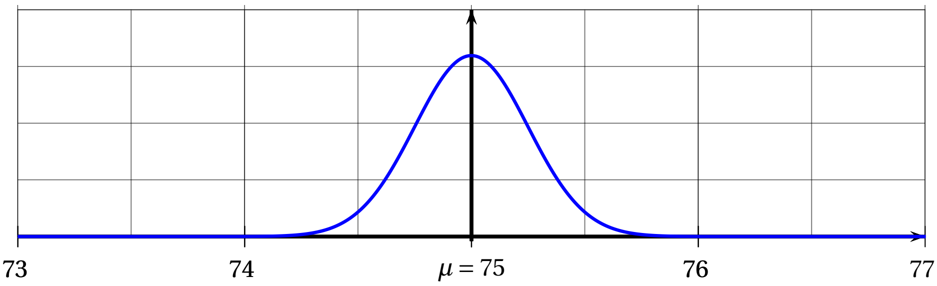
b. Ici nous calculons :

$$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{20}{0} 0,026^0 \times (1 - 0,026)^{20} + \binom{20}{1} 0,026^1 \times (1 - 0,026)^{19} \approx 0,906$$

Ou encore :

$$P(X \leqslant 1) = \text{BinomFrep}(20, 0.026, 1) \approx 0,906$$

Partie B



1. Nous pouvons lire : $\mu = 75$.
2. $P(74,4 \leqslant Y \leqslant 75,6) = \text{NormalFrep}(74.4, 75,6, 75, 0.25) \approx 0,984$.
3. Le résultat de cours est : $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$,
ici $h = 2\sigma = 0,50$.

Partie C

1. La fréquence de médaille défectueuse est de : $f = \dfrac{11}{180} \approx 0,061$.
2. X_n suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. la variable $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ représente la fréquence de médaille défectueuse. La proportion de médaille défectueuse de l'échantillon de taille n est p. Ici : $n = 180$ et $n \geqslant 30$, $n \times p = 180 \times 0,03 = 5,4 \geqslant 5$ et $n \times (1 - p) = 180 \times 0,97 = 174,6 \geqslant 5$
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% vaut :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \; ; \; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Ici : $p = 0,03$ et $n = 180$.

$$I \approx [0,00507895133 \; ; \; 0,0549210487] \, .$$

Or : $f \notin I$, le résultat de la question précédente rend pertinente la prise de décision d'arrêter la production pour procéder au réglage de la machine M_B.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

La situation peut être modélisée par une suite (V_n).
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $V_0 = 100\,000$.
Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1. **a.** Volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 :

$$V_0 = 100\,000 \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times 100\,000 = 96\,000 \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 96\,000 - 500 = 95\,500 = V_1$$

b. Volume d'eau V_2, au matin du 3 juillet 2013 :

$$V_1 = 95\,500 \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times 95\,500 = 91\,680 \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 91\,680 - 500 = 91\,180 = V_2$$

c. Pour tout entier naturel n

$$V_n \overbrace{\longrightarrow}^{-4\%} 0,96 \times V_n \overbrace{\longrightarrow}^{-500} 0,96V_n - 500 = V_{n+1}$$

Ainsi, $V_{n+1} = 0,96V_n - 500$.

2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 100 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $V > 0$
L6		Affecter à N la valeur $N+1$
L7		Affecter à V la valeur $0,96 * V - 500$
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher N

3. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n + 12\,500 \Leftrightarrow V_n = U_n - 12\,500$.

a. La suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96 :

$$U_{n+1} = V_{n+1} + 12\,500 = 0,96Vu_n - 500 + 12\,500 = 0,96Vu_n + 12\,000 = 0,96(Vu_n + 12\,500 = 0,96 \times U_n$$

$$U_0 = V_0 + 12\,500 = 100\,000 + 12\,500 = 112\,500$$

b. Ainsi : $U_n = 112\,500 \times (0,96)^n$.

c. Donc :

$$U_n = V_n + 12\,500 \Leftrightarrow V_n = U_n - 12\,500 = 112\,500 \times 0,96^n - 12\,500$$

4. **a.** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}
112\,500 \times 0,96^n - 12\,500 \leqslant 0 &\Leftrightarrow 112\,500 \times 0,96^n \leqslant 12\,500 \\
&\Leftrightarrow 0,96^n \leqslant \frac{12\,500}{112\,500} \simeq 0,111 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,96^n\right) = n \ln 0,96 \leqslant \ln \frac{12\,500}{112\,500} \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln \frac{12\,500}{112\,500}}{\ln 0,96} \simeq 53.825
\end{aligned}$$

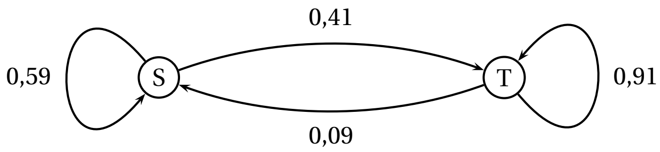
b. À la 54$^{\text{e}}$ année, c'est-à-dire en 2067, il n'y aura plus d'eau dans le bassin.

Exercice 4 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Voici le graphe probabiliste d'ordre 2 de la situation :



2. L'état stable P vérifie : $P = PM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59\ a + 0,09\ b & 0,41\ a + 0,91\ b \end{pmatrix}$

   Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

   $\begin{cases} a=0,59a+0,09b \\ b=0,41a+0,91b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-0,41a+0,09b \\ 0=0,41a-0,09b \end{cases}$

   Une des deux lignes peut être éliminée et comme $a + b = 1$, on en déduit :

   $\begin{cases} 0,41a - 0,09b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{cases}$.

3. Comme tous les coefficients de M sont différents de 0, P_n va converger vers P. L'opérateur TECIM va bien atteindre son objectif, en effet a_n et b_n vont converger vers $a = 0,18$ et $b = 0,82$.

   82% des clients vont aller chez TECIM.

   L'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80%.

Partie B

1. La répartition des clients au bout de 2 ans est donnée par :

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (0,35 \ \ 0,65) \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,265 & 0,735 \end{pmatrix}$$

   Au bout de deux ans, 26,5 % des clients seront chez SAFIR et 73,5 % chez TECIM.

2. $p_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow (s_{n+1} \quad t_{n+1}) = (0,59s_n + 0,09t_n \quad 0,41s_n + 0,91t_n)$

   Deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux :

   Ainsi : $t_{n+1} = 0,41s_n + 0,91t_n$

   Or : $s_n + t_n = 1 \Leftrightarrow s_n = 1 - t_n$

   On en déduit que : $t_{n+1} = 0,41(1 - t_n) + 0,91t_n \Leftrightarrow t_{n+1} = 0,41 + 0,5t_n$.

3. Voici le tableau complété :

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur $0,5 * T + 0,41$
L7		Affecter à N la valeur $N + 1$
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher N

4. **a.** $u_{n+1} = t_{n+1} - 0,82$

   $\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,41 + 0,5t_n - 0,82$

   $\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5t_n - 0,41$

   $\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5(t_n - 0,82)$

   $\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,5u_n$

   La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$.

b. Le terme général de (u_n) vaut : $u_n = u_0 \times q^n$.
Or : $u_0 = t_0 - 0,82 = 0,65 - 0,82 = -0,17$.
Ainsi : $u_n = -0,17 \times 0,5^n$.
Comme : $t_n = u_n + 0,82$
On conclut que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

c. On pourrait utiliser l'algorithme, ou passer par les logarithmes :

$$\begin{array}{rcl}
t_n & \geqslant & 0,80 \\
-0,17 \times 0,5^n + 0,82 & \geqslant & 0,80 \\
-0,17 \times 0,5^n & \geqslant & -0,02 \\
0,5^n & \leqslant & \dfrac{0,02}{0,17} \\
\ln(0,5^n) & \leqslant & \ln\left(\dfrac{0,02}{0,17}\right) \\
n \ln 0,5 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{0,02}{0,17}\right) \\
n & \geqslant & \ln\left(\dfrac{0,02}{0,17}\right) \div \ln 0,5 \quad \text{(en effet : } \ln 0,5 < 0) \\
n & \geqslant & 3,08746284 \\
n & \geqslant & 4
\end{array}$$

d. Au bout de 4 ans le nombre de client de TECIM sera supérieur ou égal à 80%.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Amérique du Nord 2 juin 2015

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 vaut $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$, ici $f=\dfrac{484}{4000}=0,121$ et $n=4\,000$.
   L'intervalle vaut donc : $\left[0,121-\dfrac{1}{\sqrt{4\,000}}\ ;\ 0,121+\dfrac{1}{\sqrt{4\,000}}\right]$. Soit encore : [0,105 ; 0,137]. **C'est la réponse c)**
2. L'amplitude de l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ vaut $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n}=\dfrac{2}{0,01} \Leftrightarrow n=200^2 \Leftrightarrow n=40000$. **C'est la réponse d)**

Partie B

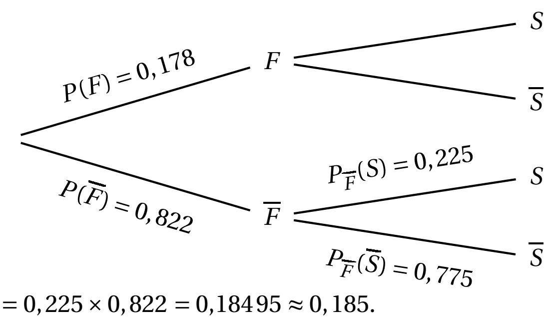
X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ avec $\mu=32$ et $\sigma=13$.

1. $P(19\leqslant X\leqslant 45)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)\approx 0,68$. C'est un résultat de cours.
   C'est la réponse b)
2. Ici, nous utilisons la calculatrice : $P(X\leqslant t)=0,9$ revient à introduire sur la calculatrice : invNorm(0.9,32,13).
   Arrondi à l'entier c'est 49 s. **C'est la réponse c)**

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, $P(S)=0,203$, en effet 20,3% des élèves sont inscrits à l'association sportive.
   De plus, parmi les élèves non fumeurs, 22,5 % sont inscrits à l'association sportive. Ainsi $P_{\overline{F}}(S)=0,225$
   Comme : $P_{\overline{F}}(\overline{S})=1-P_{\overline{F}}(S)=0,775$.
2. On en déduit l'arbre de probabilité :



3. $P(\overline{F}\cap S)=P_{\overline{F}}(S)\times P(\overline{F})=0,225\times 0,822=0,18495\approx 0,185$.
   18,5 % environ des élèves sont non fumeurs et inscrit dans une association sportive.
4. Ici on calcule : $P_S(\overline{F})=\dfrac{P(\overline{F}\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0,18495}{0,203}\approx 0,911$
5. En utilisant la formule des probabilités totales :
   $P(S)=P(\overline{F}\cap S)+P(F\cap S)\Leftrightarrow 0,203=0,18495+P(F\cap S)\Leftrightarrow P(F\cap S)=0,203-0,18495=0,01805$.
   Or : $P_F(S)=\dfrac{P(F\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0,01805}{0,178}=0,10140449\approx 0,101$

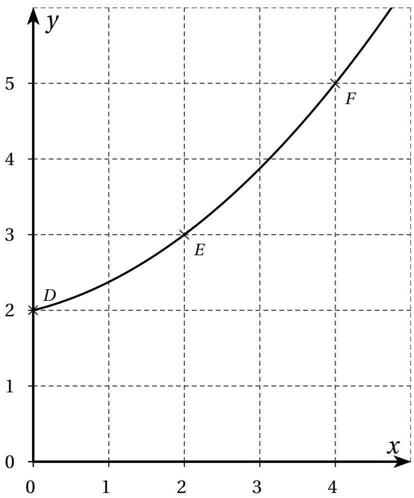
Partie B

Nous sommes dans le cas d'une épreuve de Bernoulli.
Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise, nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli (On admet que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que cette situation soit assimilée à un tirage avec remise).
Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre d'élèves gagnants, nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 4$ et $p = 0,203$.
Ici on calcule :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{4}{0} \times 0,203^0 \times (1 - 0,203)^4 \\ &= 1 - (1 - 0,203)^4 \\ &\approx 0,597 \end{aligned}$$

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A



1. **a.**
   - en 2000, $x = 0$, et $f(0) = 2$ centaine.
     Soit encore : $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \iff c = 1$.
   - en 2012, $x = 2$, et $f(2) = 3$ centaines.
     Soit encore : $a \times 2^2 + b \times 2 + c = 1 \iff 4a + 2b + c = 3$.
   - en 2014, $x = 4$, et $f(4) = 5$ centaines.
     Soit encore : $a \times 4^2 + b \times 4 + c = 1 \iff 16a + 4b + c = 5$.

   On en déduit le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{l} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{array}\right.$$

   b. $$\left\{\begin{array}{l} c=2 \\ 4a+2b+c=3 \\ 16a+4b+c=5 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} c \\ 4\,a+2\,b+c \\ 16\,a+4\,b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow MX = R$$

   Avec : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Comme M est inversible :
   $MX = R \iff X = M^{-1} \times R$

Soit encore : $X = \begin{pmatrix} 0,125 & -0,25 & 0,125 \\ -0,75 & 1 & -0,25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On obtient : $X = \begin{pmatrix} 0,125 \\ 0,25 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{4}x + 2$.

3. En 2 016, $x = 6$ et $f(6) = \dfrac{1}{8} \times 6^2 + \dfrac{1}{4} \times 6 + 2 = 8$.
Il y aura 800 agences de services à domicile.

Partie B

1. a. Ce graphe est connexe en effet la chaîne suivante relie tous les sommets :
A-B-E-F-J-K-P-O-M-N-J-I-M-L-H-G-C-D.

b. Ce graphe n'est pas complet en effet : H et I ne sont pas adjacents, par exemple.

2. Pour les deux questions dressons, le tableau des sommets et de leur degré :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Degré	2	2	2	4	4	2	2	3	3	4	2	2	4	2	2	2

Comme ce responsable voudrait effectuer un circuit qui passe une et une seule fois par chaque rue, nous sommes alors à la recherche d'un cycle eulérien ou d'une chaîne eulérienne.
Le graphe étant connexe (vu précédemment), et comme nous avons deux sommets de degré impair, ce graphe admet donc une chaîne eulérienne et non un cycle eulérien (théorème d'Euler).

a. Comme ce graphe n'admet pas de cycle, le point de départ et de fin ne peuvent être identiques.

b. Ce graphe admet une chaîne eulérienne, un circuit ou le point de départ et le point d'arrivée ne sont pas les mêmes et donc possible en passant une seule fois par chaque rue.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. De 2004 à 2005, la population de singes baisse de 15 %, au premier janvier 2 005, l'effectif sera de : $u_1 = 25000 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 21250$.

b. De 2005 à 2006, la population de singes baisse de 15 %, au premier janvier 2005, l'effectif sera de :
$u_2 = 21250 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 18062{,}5 \approx 18063$.

2. Pour passer d'une année à une autre : $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right)$.
C'est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $u_0 = 25000$.
Le terme général de (u_n) est : $u_n = u_0 \times q^n$, soit encore : $u_n = 25000 \times 0,85^n$.

3. Algorithme modifié :

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que $u \geqslant 5\,000$ faire
L5 :		u prend la valeur $u * 0,85$
L6 :		n prend la valeur $n + 1$
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Classiquement :

$$\begin{aligned}
u_n < 5000 &\Leftrightarrow 25\,000 \times 0,85^n < 5000\\
&\Leftrightarrow 0,85^n < \frac{5\,000}{25\,000}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,85^n\right) < \ln\left(\frac{5\,000}{25\,000}\right) \quad \text{(en effet : } a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b\text{)}\\
&\Leftrightarrow n\ln(0,85) < \ln\left(\frac{5\,000}{25\,000}\right)\\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{5\,000}{25\,000}\right)}{\ln(0,85)} \quad \text{(car : } \ln 0,85 < 0\text{)}\\
&\Leftrightarrow n > 9,903\,1\\
&\Leftrightarrow n \geqslant 10
\end{aligned}$$

Partie B

1. **a.** Chaque année $\frac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_0 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ auquel 400 naissances se rajoutent.

On en déduit que : $v_1 = v_0 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 400 = 5\,000 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 400 = 4\,150$.

De même : $v_2 = v_1 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 400 = 4150 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 400 = 3\,512,5 \approx 3\,513$.

b. Chaque année $\frac{1}{4}$ des singes disparaissent, il reste donc $v_n \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)$ auquel 400 naissances se rajoutent.

$v_{n+1} = v_n \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 400$.

Ainsi : $v_{n+1} = 0,75v_n + 400$.

2. **a.** $w_{n+1} = v_{n+1} - 1\,600 = 0,75v_n + 400 - 1\,600 = 0,75v_n - 1\,200 = 0,75\left(v_n - 1\,600\right) = 0,75w_n$.
(w_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme : $w_0 = v_0 - 1\,600 = 5\,000 - 1\,600 = 3\,400$.

b. (w_n) étant géométrique de premier terme $w_0 = 3\,400$, son terme général vaut :
$w_n = w_0 \times q^n$, ainsi $w_n = 3\,400 \times 0,75^n$.

c. Comme : $w_n = v_n - 1\,600 \Rightarrow v_n = w_n + 1\,600$.
Ainsi : $v_n = 1\,600 + 3\,400 \times 0,75^n$.

d. $v_n = a_n + b_n \times c_n$ avec :
- $a_n = 1\,600$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1\,600$
- $b_n = 3\,400$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 3\,400$
- $c_n = 0,75^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0^+$, car c_n est de la forme q^n avec $q \in]0\,;\,1[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1\,600$. Ceci signifie qu'à terme la population de singes va se rapprocher de 1 600.
On a par exemple $v_{20} \approx 1\,611$.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Au point d'abscisse 5 la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale, $f'(5) = 0$.

Au point d'abscisse 0 la tangente à $\mathscr{C}_f$ est la droite (AB), $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10}{2} = 5$.

2. Comme D est un point d'inflexion, l'ensemble des tangentes à $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessus de $\mathscr{C}_f$, elle est concave sur sur $[0;\,10]$, sur $[10\,;\,+\infty[$, l'ensemble des tangentes à $\mathscr{C}_f$ se trouve au dessous de $\mathscr{C}_f$, elle est convexe sur cet intervalle.

Partie B

1. f est dérivable sur [0 ; 18] en tant que produit de fonctions dérivables :

   $$f'(x) = 5 \times e^{-0,2x} + 5x \times \underbrace{e^{-0,2x}}_{e^{u(x)}} \overbrace{\times(-0,2)}^{\times u'(x)} = 5e^{-0,2x} - xe^{-0,2x} = (5-x)e^{-0,2x}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{-0,2x} > 0$, le signe ne dépend donc que de : $5-x$. On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

x	0		5		18
$5-x$		+	0	−	
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	$25e^{-1}$	↘	$90e^{-\frac{18}{5}}$

3. D'après le tableau de variations, au bout de 5 jours le nombre maximal de jouets est atteint est vaut :

   $f(5) \approx 9,197$ milliers. Cela fait 9 197 jouets.

Partie C

1. **a.** $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{10} = F(10) - F(0) = -375e^2 - (-125) = -375e^{-2} + 125 \approx 74,249.$

   b. Le nombre moyen est donné par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

   Soit encore : $\mu = \dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x \approx 7,425$ milliers de jouets. Soit encore 7 425 jouets en moyenne.

2. Le logiciel de calcul formel nous donne : $f''(x) = \dfrac{x-10}{5}e^{-0,2x}$.

   On en déduit le tableau de signes de $f''(x)$ et tableau de variations de f' :

x	0		10		18
$x-10$		−	0	+	
$e^{-0,2x}$		+		+	
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘		↗	5

   - f' est décroissante sur [0 ; 10], f est donc concave sur cet intervalle.
   - f' est croissante sur [10 ; 18], f est donc convexe sur cet intervalle.

   Comme la fonction f est définie pour $x = 10$, la fonction admet un point d'inflexion au point d'abscisse 10.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Centres étrangers 10 juin 2015

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 4 points

1. Par lecture graphique la tangente au point d'abscisse A, passe par le point de coordonnées B(5 ; 0), le coefficient directeur vaut : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-3}{5-3} = -\dfrac{3}{2}$, $f'(3) = -\dfrac{3}{2}$, **c'est la réponse d.**
2. T est une tangente qui coupe la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de f, en A est donc un point d'inflexion, ainsi $f''(3) = 0$, **c'est la réponse b.**
3. Comme $F'(x) = f(x)$ (puisque F est une primitive de f) et que pour tout $x \in [1~;~7]$: $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow F'(x) \geqslant 0$ sur ce même intervalle, la fonction F est donc croissante sur $[1 ; 7]$. **C'est la réponse a.**
4. Par lecture graphique : $3 \leqslant I \leqslant 4$, **C'est la réponse c.**

EXERCICE 2 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

1. Au premier janvier 2016, on a perdu 15 % des vélos, soit : $200 \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 200 \times 0,85$, mais on rajoute 42 nouveaux vélos mis en service, soit : $200 \times 0,85 + 42 = 212$.
2. Cette démarche restant la même si nous passons d'une n à une année $n+1$, on perd toujours 15 % des vélos, soit encore : $u_n \times 0,85$ auquel on rajoute 42 nouveaux vélos, soit encore : $u_n \times 0,85 + 42 = u_{n+1}$.
   Ainsi : $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$ avec $u_0 = 200$, nombre de vélos au départ.
3. **a.** On obtient : $U = 238$ et $N = 4$.

U	200	212	222	231	238
N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

   b. En 2019, nous aurons 238 vélos.
4. **a.** Nous avons :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 280 \\ &= 0,85u_n + 42 - 280 \\ &= 0,85u_n - 238 \qquad (v_n) \text{ est donc bien géométrique de raison } q = 0,85. \\ &= 0,85(u_n - 280) \\ &= 0,85v_n \end{aligned}$$
   Le premier terme : $v_0 = u_0 - 280 = 200 - 280 = -80$.

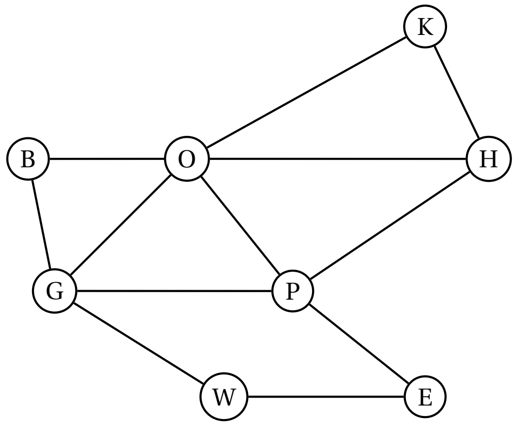
   b. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme v_0 vaut : $v_n = v_0 \times q^n$.
   Soit encore : $v_n = -80 \times 0,85^n$.

   c. Or : $u_n = v_n + 280$.
   Ainsi : $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.

   d. On a $u_n = a_n \times b_n + c_n$, avec :
   - $a_n = -80$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -80$
   - $b_n = 0,85^n$, qui est de la forme q^n avec $q \in]0;1[$, ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0^+$
   - $c_n = 280$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 280$

   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 280$.
   Le nombre de vélos tendra vers 280 quand le nombre d'années écoulées sera grand.
5. Au 31 décembre 2019 cinq années se sont écoulées, il faudra donc calculer le nombre de vélos pour n variant de 0 à 4 avec $u_4 \approx 238$.
   On a : $u_0 + \cdots + u_4 \approx 200 + 212 + 222 + 231 + 238 = 1\,103$ vélos.
   Le coût unitaire d'un vélo est de 300 €, le coût total est donc de : $1\,103 \times 300 = 330\,900$ €.

EXERCICE 2 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. **a.** Le graphe Γ est connexe, en effet la chaîne suivante : B-O-K-H-P-E-W-G passe par tous les sommets, ainsi deux sommets quelconques seront toujours reliés par une chaîne.

   b. Le graphe n'est pas complet : W et B ne sont pas adjacents, par exemple.

2. Voici le tableau des sommets degrés :

Sommets	W	B	E	G	H	O	P	K
Degrés	2	2	2	4	3	5	4	2

Le graphe a exactement deux sommets de degré impair, étant connexe, il admet une chaîne Eulérienne d'après le théorème d'Euler.

Voici un exemple de chaîne eulérienne : H-O-B-G-W-E-P-G-O-P-H-K-O

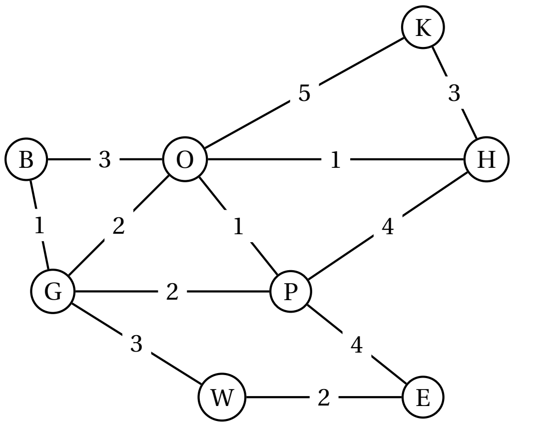
3. La matrice d'adjacence de Γ vaut :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **a.** Nous lisons dans M^3, le coefficient $m_4^3 = 4$, il y a donc 4 chemins de longueurs 3 reliant H à G.

   b. Voici les quatre chemins possibles de longueurs 3 :
   G-B-O-H G-O-P-H G-P-O-H G-O-K-H

5. Nous allons utiliser pour cela l'algorithme de Dijsktra :



Légende :
B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

W	B	E	G	H	O	P	K	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	W(0)
|	∞	2 (W)	3 (W)	∞	∞	∞	∞	E(2)
|	∞	|	3 (W)	∞	∞	6 (E)	∞	G(3)
|	4 (G)	|	|	∞	5 (G)	5 (G)	∞	B(4)
|	|	|	|	∞	5 (G)	5 (G)	∞	O(5)
|	|	|	|	6 (O)	|	5 (G)	10 (O)	P(5)
|	|	|	|	6 (O)	|	|	10 (O)	H(6)
|	|	|	|	|	|	|	9 (H)	K(9)

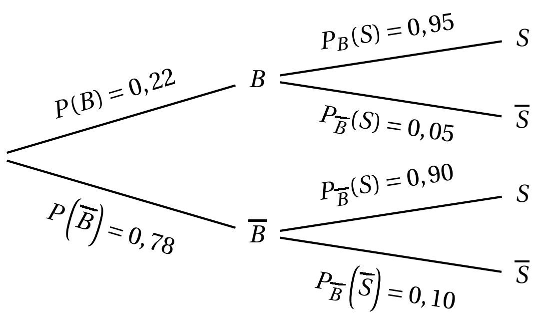
Le temps le plus court de Westminster à la station King's Cross St Pancras vaut : 9 minutes. Le chemin est : W-G-O-H-K

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 5 points

Partie A

1. Dans un premier temps :
   - $P(\overline{S}) = 1 - P(S)$.
   - $P_{\overline{B}}(S) = 1 - P_B(S) = 0,05$
   - $\overline{S} = 1 - P_{\overline{B}}(S) = 0,10$

   Voici l'arbre de probabilité :



2. Ici, nous calculons : $P(S \cap B) = P_B(S) \times P(B) = 0,95 \times 0,22 = 0,209$.
3. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(S \cap B) + P\left(S \cap \overline{B}\right)\\
&= 0,209 + P_{\overline{B}}(S) \times P\left(\overline{B}\right)\\
&= 0,209 + 0,90 \times 0,78\\
&= 0,209 + 0,702\\
&= 0,911
\end{aligned}$$

4. Ici on calcule : $P_S\left(\overline{B}\right) = \dfrac{P\left(S \cap \overline{B}\right)}{P(S)} = \dfrac{0,702}{0,911} \approx 0,771.$

Partie B

X suit la loi normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 300$ et $\sigma = 2$.

1. On calcule ici : $P(300-4 \leqslant X \leqslant 300+4) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$. C'est un résultat de cours.

2. Pour cela, on utilise sa calculatrice, en utilisant la fonction : FracNormale$(0.01, \mu, \sigma)$ ou invNorm$(0.01, \mu, \sigma)$.
On trouve : $a \approx 295$ g.

Partie C

Nous avons $p = 0,9$ et :

- $n = 130$ et $n \geqslant 30$.
- $n \times p = 130 \times 0,9 = 117 \geqslant 5$.
- $n \times (1-p) = 130 \times (1-0,9) = 13 \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotiques des fréquences au seuil de 95 % vaut :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On trouve :

$$I = [0,848\ ;\ 0,952].$$

La fréquence observée vaut : $f = \dfrac{115}{130} \approx 0,8846 \approx 0,885$. Donc $f \in I$, on ne peut pas remettre l'affirmation du directeur commercial en cause. La fréquence appartieni à cet intervalle avec une probabilité de 0,95.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

1. f définie et dérivable sur [1 ; 11] et :

$$f'(x) = -0,5 \times 2x + 2 + 15 \times \frac{1}{x} = -x + 2 + \frac{15}{x} = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}$$

2. On cherche dans un premier temps les racines de : $-x^2 + 2x + 15$ (*).

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 15 = 64$$

• Comme $\Delta > 0$, (*) admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = 5 \quad \text{et : } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = -3$$

• $a < 0$, nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	1		5		11
$-x^2+2x+15$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{2}+15\ln(5)$	$\searrow$	$-\frac{77}{2}+15\ln(11)$

$f(1)=1{,}5$; $f(5)=-\dfrac{5}{2}+15\ln(5)\approx 21{,}642$ et $f(11)=-\dfrac{77}{2}+15\ln(11)\approx -2{,}53$.

3. **a.** Sur les intervalles :

- $[1\,;5]$, la fonction f admet un minimum $f(1)=1{,}5$, ainsi sur cet intervalle, $f(x)=0$ n'admet pas de solution.
- $[5\,;11]$, la fonction f est strictement décroissante et continue (elle est dérivable) de plus 0 est compris entre $f(5)$ et $f(11)$, l'équation $f(x)=0$ admet donc une solution unique sur cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédaire et la stricte monotonie de la fonction f.

On en déduit que sur l'intervalle $[1\,;11]$, $f(x)=0$ admet une solution unique que l'on appellera α.

b. Avec la calculatrice, nous trouvons à 10^{-2} près : $\alpha\approx 10{,}66$.

c. D'après le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;11]$:

- $f(x)=0 \iff x=\alpha$.
- $f(x)>0 \iff x\in[1\,;\,\alpha[$.
- $f(x)<0 \iff x\in]\alpha\,;\,11]$.

4. **a.** Pour cela, nous allons dériver F :

$$F'(x)=-\frac{1}{6}\times 3\,x^2+2\,x-15+15\times\ln(x)+15\,x\times\frac{1}{x}=-0{,}5\,x^2+2\,x-15+15\,\ln(x)+15=f(x).$$

Comme $F'(x)=f(x)$, F est bien une primitive de f.

b. $\displaystyle\int_1^{11} f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_1^{11}=F(11)-F(1)=-\frac{1595}{6}+165\times\ln(11)-\left(-\frac{85}{6}\right)=-\frac{755}{3}+165\times\ln(11)\approx$ 143,98

c. La valeur moyenne de f sur l'intervalle sur $[1\,;11]$ vaut à 10^{-2} près :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{11-1}\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{143{,}98}{10}\approx 14{,}40$$

Partie B

1. Il faut que $f(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in[1\,;\,\alpha]$, et tout cela en centaines de chaises. La quantité de chaises doit donc être comprise entre 100 et 1 066 chaises environ.

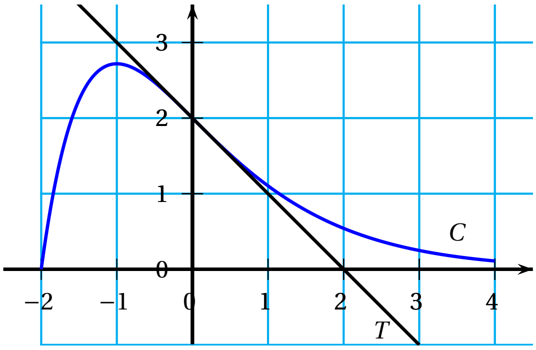
2. f admet sont maximum $-\dfrac{5}{2}+15\ln(5)$ qui est atteint pour $x=5$.
Pour 500 chaises, le bénéfice mensuel maximal vaut environ 21,642 milliers d'euros.
C'est à dire : 21 642 €.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Polynésie 12 juin 2015

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. La fonction g est définie est dérivable pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $g'(x) = 6\text{e}^{3x} + \dfrac{1}{2x}$, c'est **la réponse c.**
2. La fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0, en effet la tangente coupe la courbe C au point d'abscisse O, de plus la courbe représentative se trouve au dessus pour $x \in [0\ ;\ 4]$, elle est donc convexe sur cet intervalle. C'est **la réponse d.**



3. La valeur ne peut être un nombre décimal, n est un entier naturel. En programmant cet algorithme, on trouve $n = 8$. C'est **la réponse c.**
4. X suit une loi uniforme sur $[0;\ 5]$, l'espérance du loi uniforme sur $[a;\ b]$ vaut : $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+5}{2} = \dfrac{5}{2}$.
C'est **la réponse c.**

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

1. L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % vaut $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   a. Pour la partie champ traité, la fréquence de fruits abimés vaut $f = \dfrac{18}{100}$, l'intervalle vaut ici :

$$\left[\frac{18}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ \frac{18}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$$

   On trouve :

$$I_T = [0,08\ ;\ 0,28].$$

   b. Pour la partie champ non traité, la fréquence de fruits abimés vaut $f = \dfrac{32}{100}$ l'intervalle vaut ici :

$$\left[\frac{32}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ \frac{32}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$$

   On trouve :

$$I_{\overline{T}} = [0,22\ ;\ 0,42]$$

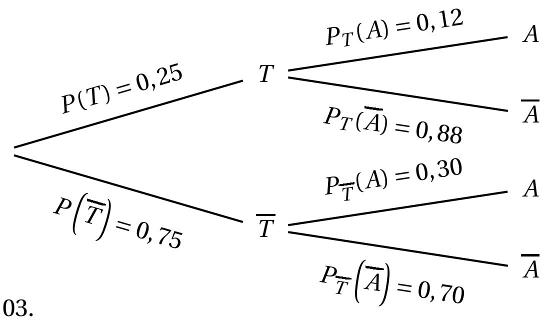
2. La proportion, dans le cas du champ traité, la proportion de fruits abimés oscillera entre 8 % et 28 % avec une probabilité de 0,95.
La proportion, dans le cas du champ non traité, la proportion de fruits abimés oscillera entre 22 % et 42 % avec une probabilité de 0,95.
Le traitement semble plus efficace.

Partie B

1. Dans un premier temps :

- $P_T(A) = 0,12$
- $P_T(\overline{A}) = 1 - P_T(A) = 0,88$
- $P_{\overline{T}}(A) = 0,30$
- $P_{\overline{T}}(\overline{A}) = 1 - P_{\overline{T}}(A) = 0,70$
- $P(T) = \dfrac{1}{4} = 0,25$
- $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 0,75$

Voici l'arbre de probabilité traduisant cette situation :



2. **a.** $P(T \cap A) = P_T(A) \times P(T) = 0,12 \times 0,25 = 0,03$.

   b. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} P(A) & = & P(A \cap T) + P\left(A \cap \overline{T}\right) \\ & = & P_T(A) \times P(T) + P_{\overline{T}}(A) \times P\left(\overline{T}\right) \\ & = & 0,12 \times 0,25 + 0,3 \times 0,75 \\ & = & 0,03 + 0,225 \\ & = & 0,255 \end{array}$$

   Ainsi : $P(A) = 0,255$.

3. On calcule ici : $P_A(T) = \dfrac{P(T \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,03}{0,255} \approx 0,12$ et $0,12 \neq 0,25$. Cette affirmation est donc fausse.

4. Nous sommes dans le cas d'une expérience de Bernoulli (Les fruits sont abimés ou non).

   Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise (en effet chaque fruit ne dépend pas du précédent, bien que ...), nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli.

   Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre de fruits abimés nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 5$ et $p = P(A) = 0,255$.

   Nous calculons ici : $P(X \leqslant 1) = \dbinom{5}{0} \times 0,255^0 \times (1 - 0,255)^5 + \dbinom{5}{1} \times 0,255^1 \times (1 - 0,255)^4 \approx 0,622$.

   Nous avons utilisé ici la calculatrice avec : binomcdf(5,0.255,1).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **a.** $P = H \times C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 25 + 10 \times 20 + 14 \times 15 \\ 6 \times 25 + 6 \times 20 + 10 \times 15 \\ 12 \times 25 + 10 \times 20 + 18 \times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}$

   b. Le premier coefficient représente 610 €coût du modèle 1 après passage par les trois postes de travail : 8h multiplié par 25 €/h (coût horaire du poste 1) plus 10h multiplié par 20 €/h (coût horaire du poste 2) plus 14 h multiplié par 15 €/h (coût horaire du poste 3).
   De même pour les autres coefficients.

2. **a.** Ici, nous ne connaissons pas le coût unitaire par poste, a, b et c désignent les coûts horaires par postes de travail respectif, Poste 1, Poste 2 et Poste 3.
   Pour le modèle 1 :
   Le coût du modèle 1 après passage par les trois postes de travail : 8h multiplié par a €/h (coût horaire du poste 1) plus 10h multiplié par b €/h (coût horaire du poste 2) plus 14 h multiplié par c €/h (coût horaire du poste 3), et il vaut 500€
   De même pour les autres modèles.
   On en déduit que : $\begin{pmatrix} 8 \times a + 10 \times b + 14 \times c \\ 6 \times a + 6 \times b + 10 \times c \\ 12 \times a + 10 \times b + 18 \times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} \Leftrightarrow H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.

b. Pour déterminer les réels a, b et c, il suffit de calculer : $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = H^{-1} \times \begin{pmatrix} 500\\ 350\\ 650\end{pmatrix}$.

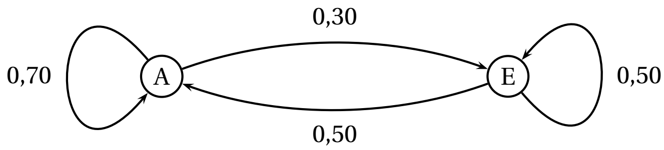
H est bien inversible : $H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

Et : $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500\\ 350\\ 650\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\\ \frac{25}{2}\\ \frac{25}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\\ 12,5\\ 12,5\end{pmatrix}$

Le coût horaire est de 25 €/h pour le poste 1, 12,5 €/h pour le poste 2 et de 12,5€/h pour le poste 3.

Partie B

1. a. Le graphe probabiliste est :



b. La matrice de transition vaut : $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3\\ 0,5 & 0,5\end{pmatrix}$

2. a. Les spots sont illuminés de la manière suivante, les spots s'allument tous à 22h00, il y a donc 100 % des postes allumés au départ et donc 0 % qui sont éteints. L'état initial et donc 1 en terme de probabilité pour les postes allumés et 0 pour les postes éteints.

Ainsi : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

De plus : $P_{n+1} = P_n \times M$, on en déduit que : $P_n = P_0 \times M^n$

b. Nous savons que :

$$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3\\ 0,5 & 0,5\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{157}{250} & \frac{93}{250}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372\end{pmatrix}$$

La probabilité que les spots soient éteints au bout de 30 secondes soit encore 3×10 est donnée par $b_3 = 0,372$.

3. Rechercher l'état stable c'est rechercher les coefficients a et b de : $P = \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix}$, tels que $a + b = 1$ avec : $P = P \times M$.

$P = P \times M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times 0,7 + b \times 0,5\\ a \times 0,3 + b \times 0,5\end{pmatrix}$ Or deux matrices sont égales, si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on en déduit le système suivant :

$\begin{cases} 0,7a+0,5b=a\\ 0,3a+0,5b=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,3a+0,5b=0\\ 0,3a-0,5b=0\end{cases}$

Nous pouvons éliminer une des deux lignes, car la deuxième ligne est la première multipliée par (-1). Comme $a + b = 1$, on en déduit le nouveau système :

$\begin{cases} 0,3a-0,5b=0\\ a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3a-0,5b=0\\ a=1-b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,3(1-b)-0,5b=0\\ a=1-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,8\ b+0,3=0\\ a=1-b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0,375\\ a=1-0,375\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,625\\ b=0,375\end{cases}.$

L'état stable vaut : $P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375\end{pmatrix}$

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Toutes les semaines, la concentration baisse de 10 %, soit : $C_n \times \left(1 - \dfrac{1}{100}\right)$ mg.l^{-1}.
De plus, chaque semaine le distributeur automatique déverse : 10 mg.l^{-1}, soit $C_n \times 0,9 + 10$.
Au final, d'une semaine à l'autre, la concentration vaudra : $C_{n+1} = 0,9C_n + 10$.

2. **a.** On a :
$$\begin{array}{rcl} V_{n+1} & = & C_{n+1} - 100 \\ & = & 0,9C_n + 10 - 100 \\ & = & 0,9C_n - 90 \\ & = & 0,9(C_n - 100) \\ & = & 0,9Vn \end{array}$$
(V_n) est bien géométrique de raison $q = 0,9$.

b. Le terme général de (V_n) de premier terme $V_0 = C_0 - 100 = 160 - 100 = 60$, vaut : $V_n = V_0 \times q^n$
Ainsi : $V_n = 60 \times 0,9^n$

c. Comme $V_n = C_n - 100 \Leftrightarrow C_n + V_n + 100$.
Nous en déduisons que :
$$C_n = 0,9^n \times 60 + 100$$

3. **a.** $C_n = a_n \times b_n + c_n$ avec :
- $a_n = 0,9^n$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0^+$, car a_n est de la forme q^n avec $q \in]0\,;\,1[$
- $b_n = 60$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 60$
- $c_n = 100$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = 100$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} C_n = 100$
La concentration tendra donc vers 100 mg.l^{-1}.

b. Ici, on résout :
$$\begin{array}{rcll} C_n < 140 & \Leftrightarrow & 0,9^n \times 60 + 100 < 140 & \\ & \Leftrightarrow & 0,9^n \times 60 < 40 & \\ & \Leftrightarrow & 0,9^n < \dfrac{2}{3} & \\ & \Leftrightarrow & \ln(0,9^n) < \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) & \text{(en effet : } a \leqslant b \Leftrightarrow \ln a \leqslant \ln b\text{)} \\ & \Leftrightarrow & n\ln(0,9)\, w \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) & \\ & \Leftrightarrow & n > \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) & \text{(en effet : } \ln 0,9 < 0\text{)} \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 4 & \text{(en effet : } \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) \approx 3,848\text{)} \end{array}$$
Au bout de la quatrième semaine, la concentration sera inférieure ou égale à 140 mg.l^{-1}.

4. Non, la concentration sera inférieure à 140 mg.l^{-1} au bout de 4 semaines, la concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 160 mg.l^{-1} et elle doit se conformer à cela pendant une durée de 6 semaines au moins.

Partie B

Ici (C_n) est la suite définie par la relation de récurrence suivante : $C_{n+1} = C_n \times 0,9 + 12$, avec $C_0 = 160$.
En calculant les premiers termes, on obtient :

$$C_1 = 156,\ C_2 = 152,4,\ C_3 = 149,16,\ C_4 = 146,244,\ C_5 = 143,6196,\ C_6 = 141,25764 \text{ et } C_7 = 139,131876.$$

Au bout de 7 semaines, la concentration sera à nouveau inférieure à 140 mg.l^{-1}, mais elle doit se conformer à cela pendant une durée de 6 semaines au moins. Nous sommes donc tout juste bon.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. Par lecture graphique, le nombre de personne ayant choisi la formule privilège est : $P(2) = 5$ dizaines de milliers de passagers, soit encore : 50 000 passagers.
2. En 2015 :
   - $P(15) \approx 3,15$ dizaines de milliers de passagers,
   - $A(15) \approx 5,55$ dizaines de milliers de passagers,

   L'écart vaudra : $A(15) - P(15) \approx 5,55 - 3,15 = 2,4$ dizaines de milliers de passagers.
3. En 2006, il y aura autant de passagers ayant choisi la formule *Privilège* que la formule *Avantage*.
4. Le nombre de passagers pour la formule *Privilège*, de 2007 à 2015 correspond à : $N = \displaystyle\int_7^{15} P(x)\,\mathrm{d}x$.

   En unité d'aire de 1 carreau, on a : $24 \leqslant N \leqslant 32$ en dizaines de milliers de passagers.

   Le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

Partie B

1. **a.** $E'(x) = \dfrac{2}{x+1} + 0,6\mathrm{e}^{-0,2x}$,
   - Comme : $x \geqslant 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{x+1} > 0$
   - De plus : $\mathrm{e}^{A} > 0$ pour tout A réel, on en déduit que : $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0 \Rightarrow 0,6\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$.

   Ainsi : $E'(x) > 0$ pour $x \in [0\,;\,16]$.

   b. On en déduit le tableau de signe de $E'(x)$ et les variations de E :

x	0		16
$E'(x)$		$+$	
E			$-3\mathrm{e}^{-\frac{16}{5}} + 2\ln(17) - 3$
	-6	$\nearrow$	

   $E(0) = A(0) - P(0) = 2\,\ln(0+1) - \left(3 + 3e^{-0,2\times 0}\right) = -6$

   $E(16) = A(16) - P(16) = 2\ln(16+1) - \left(3 + 3e^{-0,2\times 16}\right) = -3 \times \mathrm{e}^{-\frac{16}{5}} + 2\ln(17) - 3 \approx 2,544$

2. **a.** Nous savons que E est strictement croissante sur $[0; 16]$, et 0 est compris entre $E(0)$ et $E(16)$, E est continue en tant que fonction dérivable sur $[0; 16]$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction E, $E(x) = 0$ admet une solution unique α. Une valeur arrondie au dixième vaut : $\alpha \approx 6,025 \approx 6,0$.

   b. Comme E est strictement croissante sur $[0; 16]$, et que $E(\alpha) = 0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		16
$E(x)$		$-$	0	$+$	

   Conclusion :
   - Pour $x < \alpha$, $E(x) < 0 \Leftrightarrow A(x) < P(x)$, sur $[0\,;\,\alpha]$, le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* sera inférieur au nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.
   - Pour $x > \alpha$, $E(x) < 0 \Leftrightarrow A(x) > P(x)$, sur $[\alpha\,;\,+16]$, le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* sera supérieur au nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.
   - Pour $x = \alpha$, $E(x) < 0 \Leftrightarrow A(x) = P(x)$, sur pour $x = \alpha$ le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* sera égal au nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Asie 16 juin 2015

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.

1. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 10 fois de suite. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de « pile » obtenus.
   La probabilité d'obtenir exactement 5 « pile » est, arrondie au centième :

   a. 0,13 **b.** 0,19 **c.** 0,25 **d.** 0,5

   Réponse correcte : c

   La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;0,5)$.

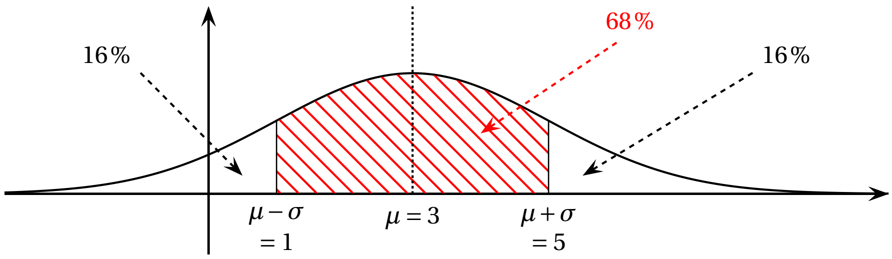
   Alors $P(X=5)=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}\times 0,5^5\times(1-0,5)^{10-5}\approx 0,246$.

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2; alors une valeur approchée au centième de la probabilité $p(X\geqslant 5)$ est :

   a. 0,14 **b.** 0,16 **c.** 0,32 **d.** 0,84

   Réponse correcte : b

   On connaît la représentation de la fonction de répartition de la loi normale :



   $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0,68$ et $P(X\leqslant\mu-\sigma)=P(X\geqslant\mu+\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx 0,16$

3. Dans une ville donnée, pour estimer le pourcentage de personnes ayant une voiture rouge, on effectue un sondage. L'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 0,95 étant inférieure ou égale à 0,04 la taille de l'échantillon choisi est :

   a. 400 **b.** 1 000 **c.** 2 000 **d.** 2 500

   Réponse correcte : d

   L'intervalle de confiance généralement choisi au seuil de 95 % est $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où f est la fréquence observée dans l'échantillon de taille n. L'amplitude de cet intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

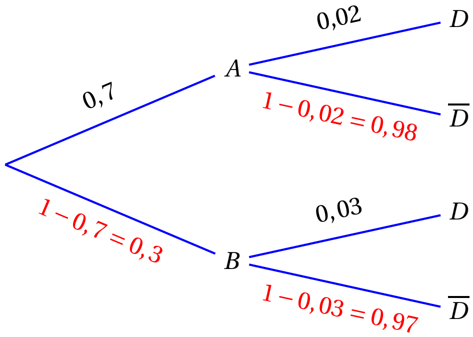
   On doit donc avoir $\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0,04$ ce qui équivaut à $n=2500$.

4. Une entreprise vendant des parquets flottants s'approvisionne auprès de deux fournisseurs A et B. Le fournisseur A livre 70 % du stock de l'entreprise. On sait que 2 % des pièces livrées par A présentent un défaut et 3 % des pièces livrées par B présentent un défaut.
   On prélève au hasard une pièce du stock de l'entreprise, quelle est la probabilité, que cette pièce soit sans défaut?

   a. 0,023 **b.** 0,05 **c.** 0,97 **d.** 0,977

   Réponse correcte : d

On appelle A l'événement « la pièce provient du fournisseur A » et B l'événement « la pièce provient du fournisseur B ».
On appelle D l'événement « la pièce présente un défaut » et $\overline{D}$ l'événement contraire.
On représente la situation par un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :
$P(\overline{D}) = P(\overline{D} \cap A) + P(\overline{D} \cap B) = P(A) \times P_A(\overline{D}) + P(B) \times P_B(\overline{D}) = 0,7 \times 0,98 + 0,3 \times 0,97 = 0,977$

5. Pour une puissance électrique donnée, le tarif réglementé du kilowattheure est passé de 0,1140 € au 01/07/2007 à 0,1372 € au 01/07/2014.
Cette augmentation correspond à un taux d'évolution arrondi au centième, chaque année, de :

a. 1,72 % **b.** 1,67 % **c.** 2,68 % **d.** 1,33 %

Réponse correcte : c

Le coefficient multiplicateur d'augmentation entre 2007 et 2014 est de $\dfrac{0,1372}{0,1140}$.

Il correspond à 7 années, donc en moyenne pour une année il est de $\left(\dfrac{0,1372}{0,1140}\right)^{\frac{1}{7}} \approx 1,026816$.

Cela correspond à un pourcentage d'augmentation de 2,68 %.

Exercice 2 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2 %. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25 € par an.
On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014 + n$.

Partie A

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Traitement
Saisir une valeur pour C
        Tant que C < 2000 faire
                Affecter à N la valeur N + 1
                Affecter à C la valeur 1,02C − 25
        Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

1. **a.** On saisit la valeur 1 900 pour C. Pour cette valeur de C, on recopie et on complète le tableau, en suivant pas à pas l'algorithme précédent ; les valeurs sont arrondies à l'euro :

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de C	1 900	1 913	1 926	1 940	1 954	1 968	1 982	1 997	2 012

b. L'algorithme affiche la valeur 8.
Cela signifie qu'à partir de $n = 8$, c'est-à-dire de l'année $2014 + 8 = 2022$, la valeur du capital dépassera 2 000 euros.

2. Pour une valeur de C égale à 1 250, comme $1250 \times 1,02 - 25 = 1250$, la valeur de C ne changerait pas dans l'algorithme et on ne sortirait jamais de la boucle TANT QUE.

Partie B

Valentine a placé 1 900 € à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1900$.

1. L'année $2014 + n$, le capital c_n produit 2 % d'intérêts, donc il devient l'année suivante $1,02c_n$; mais comme il y a 25 euros de frais, on peut dire que, pour tout n, $c_{n+1} = 1,02c_n - 25$.

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = c_n - 1250$, donc $c_n = u_n + 1250$.

a. Pour tout n de $\mathbb{N}$:
$u_{n+1} = c_{n+1} - 1250 = 1,02c_n - 25 - 1250 = 1,02(u_n + 1250) - 1275 = 1,02u_n + 1275 - 1275$
$= 1,02u_n$
$u_0 = c_0 - 1250 = 1900 - 1250 = 650$
Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 650$ et de raison $q = 1,02$.

b. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 650$ et de raison $q = 1,02$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = u_0 \times q^n = 650 \times 1,02^n$.
Et comme $c_n = u_n + 1250$, on peut déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $c_n = 650 \times 1,02^n + 1250$.

3. Pour tout n, $u_n > 0$. Comme $1,02 > 1$, on déduit que $1,02u_n > u_n$ ce qui équivaut à $u_{n+1} > u_n$ et donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
Pour tout n, $c_{n+1} - c_n = u_{n+1} + 1250 - (u_n + 1250) = u_{n+1} + 1250 - u_n - 1250 = u_{n+1} - u_n > 0$
Donc la suite (c_n) est croissante.

4. On peut programmer la fonction `650*1.02^X+1250` sur la calculatrice et faire afficher le tableau de valeurs de cette fonction.
On peut aussi résoudre l'inéquation $c_n > 2100$ d'inconnue n :

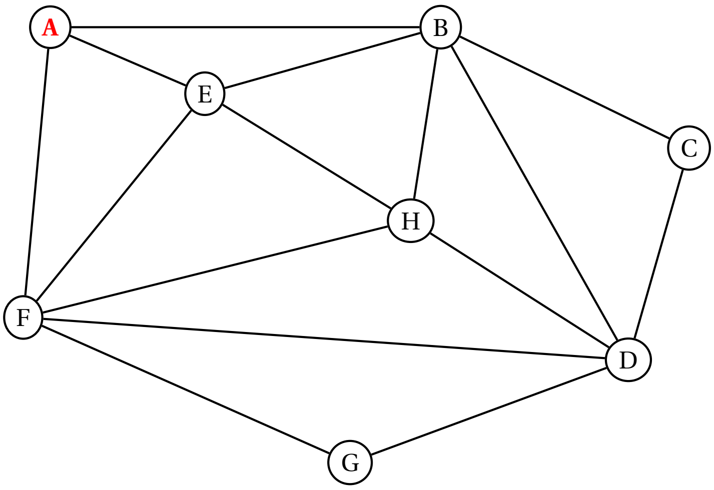
$$\begin{aligned}
c_n > 2100 &\iff 650 \times 1,02^n + 1250 > 2100\\
&\iff 650 \times 1,02^n > 850\\
&\iff 1,02^n > \frac{850}{650}\\
&\iff \ln\left(1,02^n\right) > \ln\left(\frac{850}{650}\right)\\
&\iff n \times \ln(1,02) > \ln\left(\frac{850}{650}\right)\\
&\iff n > \frac{\ln\left(\frac{850}{650}\right)}{\ln(1,02)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{850}{650}\right)}{\ln(1,02)} \approx 13,55$, donc il faut 14 années pour que la valeur du capital dépasse 2 100 €.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

1. **a.** Un graphe est complet si chaque sommet est relié à tous les autres.
Dans le graphe G_L, le sommet A n'est pas relié au sommet G, donc le graphe G_L n'est pas complet.
b. Un graphe est connexe si deux sommets quelconques sont reliés par au moins une chaîne.
Le chemin A – B – C – D – H – E – F – G relie tous les sommets entre eux, donc le graphe G_L est connexe.

2. Organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route, c'est chercher un cycle eulérien dans ce graphe.
Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair ; or le degré de A (nombre d'arêtes sortant de A) est 3, donc ce graphe ne contient pas de cycle eulérien.
Donc on ne peut pas organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route.

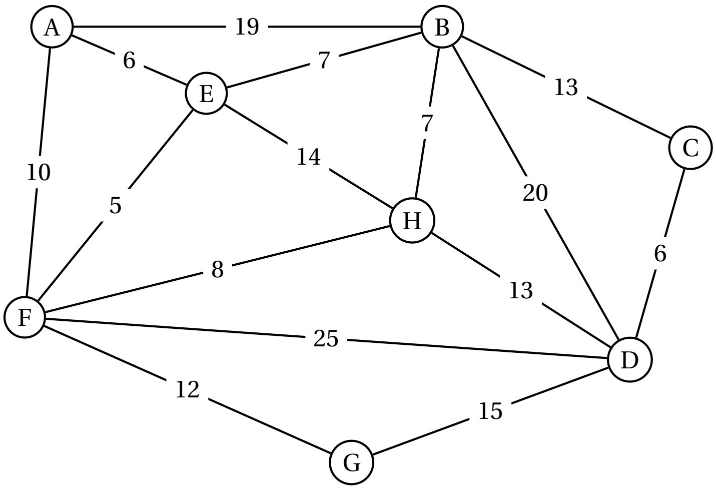
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H est le coefficient de la matrice M^3 situé sur la 1re ligne (pour A) et la 8e colonne (pour H), c'est-à-dire 6.
Il y a donc 6 chemins de longueur 3 reliant A à H.
Ce sont : AFEH – AEFH – ABEH – AEBH – AFDH – ABDH

Partie B

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D.



L'algorithme de Dijkstra permet de déterminer les plus courts chemins partant du sommet A vers tous les autres sommets :

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A (0)
	19 A	∞	∞	6 A	10 A	∞	∞	E (6)
	~~19 A~~ 13 E	∞	∞		10 A ~~11 E~~	∞	20 E	F (10)
	13 E	∞	35 F			22 F	~~20 E~~ 18 F	B (13)
		26 B	~~35 F~~ 33 B			22 F	18 F ~~20 B~~	H (18)
		26 B	~~33 B~~ 31 H			22 F		G (22)
		26 B	31 H ~~37 G~~					C (26)
			31 H ~~32 C~~					D (31)

Le chemin le plus court pour aller de A vers D est de longueur 31 : A $\xrightarrow{10}$ F $\xrightarrow{8}$ H $\xrightarrow{13}$ D

EXERCICE 3 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0; 10[$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f

a. D'après le logiciel de calcul formel, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1} + 1$ et $f'(x) > 0 \iff x > 1$.
$f(1) = 1 + \mathrm{e}^0 = 2$
$f(0) = 0 + \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ et $f(10) = 10 + \mathrm{e}^{-9} \approx 10,00$
D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	↘	2	↗	$10+\mathrm{e}^{-9}$

b. La fonction f admet donc sur $[0\,;10]$ un minimum $f(1) = 2$.

2. D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$.
Or, pour tout x, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ donc la fonction f' est croissante et donc la fonction f est convexe sur $[0\,;10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.
Comme le nombre d'objets est limité à 1 000 et que x désigne le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines, on peut dire que $x \in [0; 10]$.

1. La fonction f représente le coût de revient exprimé en milliers d'euros; ce coût est minimum lorsque la fonction f atteint son minimum, c'est-à-dire pour $x = 1$.
Pour que le coût de revient soit minimum, il faut donc produire 100 objets.

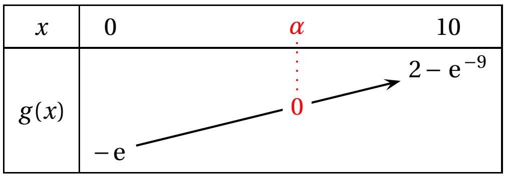
2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

a. La vente de 100 objets rapporte 100×12 € soit $1,2$ millier d'euros donc la vente de x centaines d'objets rapporte $1,2x$ milliers d'euros.

b. La marge brute $g(x)$ est la différence entre le prix de vente et le coût de production donc :
$g(x) = 1,2x - \left(x + \mathrm{e}^{-x+1}\right) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$

c. Sur $[0\,;10]$, $g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x+1}$. Or pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$, donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;10]$ et la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

3. **a.** La fonction g est dérivable donc continue, et strictement croissante sur $[0\,;10]$.
$g(0) = -\mathrm{e} < 0$ et $g(10) = 0,2 \times 10 - \mathrm{e}^{-9} \approx 2 > 0$
D'où le tableau de variations de la fonction g :



D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0\,;10]$.

b. $\left.\begin{array}{l} g(1) = -0,8 < 0 \\ g(2) \approx 0,03 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1\,;2]$ $\left.\begin{array}{l} g(1,9) \approx -0,027 < 0 \\ g(2,0) \approx 0,03 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,9\,;2]$

$\left.\begin{array}{l} g(1,94) \approx -0,0026 < 0 \\ g(1,95) \approx 0,003 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,94\,;1,95]$

4. Pour réaliser une marge brute positive, il faut produire x centaines d'objets de façon que $g(x) > 0$; donc il faut que $x > \alpha$.
On sait que $\alpha \in [1,94\,;1,95]$ et que x représente des centaines d'objets.
La quantité minimale d'objets à produire pour que cette entreprise réalise une marge brute positive est donc de 195.

Exercice 4 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = 2 - 2x$$

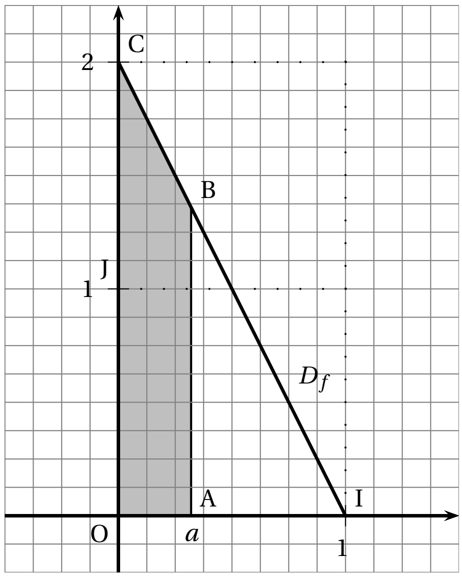
On a tracé ci-contre la droite D_f, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

Le point C a pour coordonnées $(0\,;2)$.

Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a\,;0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a\,;f(a))$.

Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire.



L'aire du triangle OIC rectangle en O vaut $\dfrac{\mathrm{OI} \times \mathrm{OC}}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.

Il faut donc chercher la position du point A de coordonnées $(a\,;0)$ pour que l'aire du trapèze OABC soit égale à l'aire du triangle AIB.

Autrement dit, il faut que l'aire du triangle AIB soit la moitié de celle du triangle OIC, soit $\dfrac{1}{2}$.

L'aire du triangle OIB rectangle en A vaut $\mathscr{A} = \dfrac{\text{AI} \times \text{AB}}{2}$.

Le point B a pour abscisse a et pour ordonnée $f(a) = 2-2a$; le point A a pour coordonnées $(a\,;0)$ donc AB $= 2-2a$.

Le point I a pour coordonnées $(1\,;0)$ donc AI $= 1-a$.

$\mathscr{A} = \dfrac{(1-a)(2-2a)}{2}$ et on doit avoir $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.

On résout dans $[0\,;1]$ l'équation $\dfrac{(1-a)(2-2a)}{2} = \dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{(1-a)(2-2a)}{2} = \dfrac{1}{2} \iff 2-2a-2a+2a^2 = 1 \iff 2a^2-4a+1=0$

Cette équation a pour solutions $a' = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $a'' = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Mais $a' \notin [0\,;1]$ donc pour que les deux aires soient égales, il faut prendre $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Antilles-Guyane 24 juin 2015

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :

a. $]-\infty\ ;\ +\infty[$ **b.** $[-2\ ;\ +\infty[$ **c.** $]-\infty\ ;\ -2]$ **d.** $[-6\ ;\ +\infty[$

Réponse b.

Une fonction deux fois dérivable est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée seconde est positive.

$f(x) = x^3 + 6x^2 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x \Longrightarrow f''(x) = 6x + 12\,;\ f''(x) \geqslant 0 \iff x \in [-2\,;+\infty[$

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{x}$. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

a. aucune solution **b.** une seule solution
c. exactement deux solutions **d.** plus de deux solutions

Réponse b.

Pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$. Donc $g(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$.

3. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. La valeur de I est :

a. $1 - \mathrm{e}^{-1}$ **b.** $\mathrm{e}^{-1} - 1$ **c.** $-\mathrm{e}^{-1}$ **d.** e^{-1}

Réponse b.

La fonction $x \longmapsto -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Donc $I = \displaystyle\int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{0} = \mathrm{e}^{-1} - 1$

4. La fonction h est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = (2x+4)\ln x$.
On note h' la fonction dérivée de la fonction h.
Pour tout nombre x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $h'(x)$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{x}$ **b.** $2\ln x + \dfrac{4}{x}$ **c.** $\dfrac{2x+4}{x}$ **d.** $2\ln x + \dfrac{2x+4}{x}$

Réponse d.

Formule de dérivation d'un produit : $h'(x) = 2 \times \ln x + (2x+4) \times \dfrac{1}{x} = 2\ln x + \dfrac{2x+4}{x}$

5. Le prix d'une action a augmenté chaque mois de 5 % et cela pendant 3 mois consécutifs.
Globalement, le prix de l'action a été multiplié par :

a. $1{,}05^3$ **b.** 1,15 **c.** $3 \times 1{,}05$ **d.** 1,45

Réponse a.

Augmenter de 5 %, c'est multiplier par 1,05 ; si on augmente de 5 % pendant 3 mois consécutifs, on multiplie par $1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 1{,}05^3$.

EXERCICE 2 — 5 points

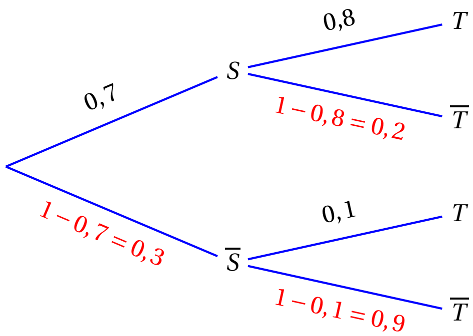
Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif. L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif. Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif. On interroge un élève au hasard dans le lycée.
On considère les évènements suivants :

S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.

T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

1. On construit un arbre pondéré décrivant la situation :



2. L'évènement « l'élève interrogé est sensible au développement durable et pratique le tri sélectif » est l'évènement $S \cap T$.
$P(S \cap T) = P(S) \times P_S(T) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(S \cap T) + P(\overline{S} \cap T) = P(S) \times P_S(T) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(T) = 0,56 + 0,3 \times 0,1 = 0,59$

4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.
On évalue si cet élève est sensible au développement durable, donc on cherche $P_{\overline{T}}(S)$:

$$P_{\overline{T}}(S) = \frac{P(S \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(S \cap \overline{T})}{1 - P(T)} = \frac{0,7 \times 0,2}{1 - 0,59} \approx 0,34$$

Les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont de 34 % donc ne sont pas inférieures à 10 %.

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés.

a. La probabilité qu'un élève interrogé au hasard pratique le tri sélectif est 0,59. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,59$.
Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

b. La probabilité qu'aucun des quatre élèves ne pratique le tri sélectif est :

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0,59^0 (1 - 0,59)^4 = 0,41^4 \approx 0,03$$

c. La probabilité qu'au moins deux des quatre élèves pratiquent le tri sélectif est $P(X \geqslant 2)$.

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \binom{4}{2} \times 0,59^2 (1 - 0,59)^{4-2} + \binom{4}{3} \times 0,59^3 (1 - 0,59)^{4-3} + \binom{4}{4} \times 0,59^4 (1 - 0,59)^{4-4} \\ &\approx 0,3511 + 0,3368 + 0,1212 \approx 0,81 \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser l'évènement contraire :
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 1 - (0,0283 + 0,1627) \approx 0,81$

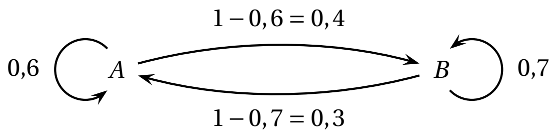
EXERCICE 2 5 points

Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée. Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.
Après une étude statistique, on considère que :

— si un vélo est loué sur le site A, la probabilité d'être ramené en A est 0,6 ;
— si un vélo est loué sur le site B, la probabilité d'être ramené en B est 0,7.

1. On note respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B » ; on traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. La matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B est :
$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$
Normalement, il n'y a pas lieu de justifier cette matrice ; c'est du cours.

3. Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).
On note P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.
Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

a. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$

D'après le cours, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = P_0 M^n$; donc :

$$P_2 = P_0 M^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,5 \times 0,48 + 0,5 \times 0,39 & 0,5 \times 0,52 + 0,5 \times 0,61 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0,24 + 0,195 & 0,26 + 0,305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,435 & 0,565 \end{pmatrix}$$

b. On calcule à la calculatrice : $P_4 = P_0 M^4 = P_0 M^2 M^2 = P_2 M^2 = \begin{pmatrix} 0,42915 & 0,57085 \end{pmatrix}$

En arrondissant au centième $P_4 \approx \begin{pmatrix} 0,43 & 0,57 \end{pmatrix}$.

Au bout de 4 jours, 43 % des vélos seront sur le site A.

c. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe.

Pour que P soit un état du graphe, il faut que $a + b = 1$.

Pour qu'en plus P soit un état stable, il faut que $PM = P$:

$$PM = P \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,6a + 0,3b & = & a \\ 0,4a + 0,7b & = & b \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -0,4a + 0,3b & = & 0 \\ 0,4a - 0,3b & = & 0 \end{array} \right. \iff 0,4a - 0,3b = 0$$

L'état stable est donc solution de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0,4a - 0,3b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,4a - 0,3(1-a) & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0,7a & = & 0,3 \\ a + b & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{3}{7} \\ b & = & \dfrac{4}{7} \end{array} \right.$$

On prend $P = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} & \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$. On vérifie que $PM = P$.

On peut donc en déduire que $P = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} & \dfrac{4}{7} \end{pmatrix}$ est l'état stable du graphe.

d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.

La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
Au début, il y a 70 vélos sur chaque site, donc 140 en tout.
Sur le site A, au bout d'un certain temps, il y aura $\frac{3}{7} \times 140 = 60$ vélos ; cela fait donc une différence de $70 - 60 = 10$ vélos.
Sur le site B, au bout d'un certain temps, il y en aura $\frac{4}{7} \times 140 = 80$ vélos ; cela fait donc une différence de $80 - 70 = 10$ vélos.
Le choix par la municipalité d'un véhicule pouvant contenir 12 vélos semble donc adapté.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. **a.** On donne l'algorithme suivant :

Variables :	k, NbClients
Traitement :	Affecter à k la valeur 0
	Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
	Tant que $k < 8$
	Affecter à k la valeur $k+1$
	Affecter à NbClients la valeur $0,9 \times$ NbClients $+ 60000$
	Afficher NbClients
	Fin Tant que

Cet algorithme calcule et affiche le nombre de clients pour k variant de 1 à 8 c'est-à-dire pour les années 2011 à 2018.

b. On complète le tableau pour k variant de 0 jusqu'à 5 :

k	0	1	2	3	4	5
NbClients	1 000 000	960 000	924 000	891 600	862 440	836 196

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par : $\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & 1000 \\ U_{n+1} & = & 0,9U_n + 60. \end{array}\right.$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$.
Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$; on a donc $U_n = V_n + 600$

a. $V_{n+1} = U_{n+1} - 600 = 0,9U_n + 60 - 600 = 0,9(V_n + 600) - 540 = 0,9V_n + 540 - 540 = 0,9V_n$
$V_0 = U_0 - 600 = 1000 - 600 = 400$
Donc la suite (V_n) est géométrique de premier terme $V_0 = 400$ et de raison $q = 0,9$.

b. La suite (V_n) est géométrique de premier terme $V_0 = 400$ et de raison $q = 0,9$ donc, pour tout n, $V_n = V_0 q^n = 400 \times 0,9^n$.

c. $\left.\begin{array}{lcl} U_n & = & V_n + 600 \\ V_n & = & 400 \times 0,9^n \end{array}\right\} \Longrightarrow U_n = 400 \times 0,9^n + 600$ pour tout entier naturel n.

d. $U_{n+1} - U_n = (400 \times 0,9^{n+1} + 600) - (400 \times 0,9^n + 600) = 400 \times 0,9^{n+1} - 400 \times 0,9^n$
$= 400 \times 0,9^n (0,9 - 1) = -400 \times 0,9^n \times 0,1 < 0$
Donc la suite (U_n) est décroissante.
Comme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$, on peut déduire que ce nombre de clients diminue au fil des années.

3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients. Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients. On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.

L'évolution depuis 2014 peut être modélisée par une suite (W_n). En 2014, l'année 0, il y a 860 000 abonnés. L'opérateur perd 8 % des abonnés, donc il en garde 92 %, et en acquiert 100 000 nouveaux chaque année.

La suite (W_n) est donc définie par : $\begin{cases} W_0 &= 860000 \\ W_{n+1} &= 0,92W_n + 100000 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

On détermine à la calculatrice, à partir de quand le nombre d'abonnés dépasse 1 000 000 :

Rang	0	1	2	3	4	5	6
Abonnés	860 000	891 200	919 904	946 312	970 607	992 958	1 013 522

Il faut donc 6 ans pour que l'opérateur retrouve plus d'un million d'abonnés.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une machine permet le conditionnement d'un jus de fruit dans des bouteilles.
La quantité de jus injecté dans une bouteille par la machine, exprimée en ml (millilitre), est modélisée avec une variable aléatoire réelle X.
On admet que celle-ci suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Partie A

On prélève une bouteille au hasard en fin de chaîne de remplissage.

1. À la calculatrice, on trouve : $P(X \leqslant 496) \approx 0,02$
2. La probabilité que la bouteille ait un contenu compris entre 497 et 500 millilitres est donné par la calculatrice : $P(497 \leqslant X \leqslant 500) \approx 0,43$
3. On sait d'après le cours que si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.
   Il faut donc prendre $\alpha = 2\sigma = 4$ pour que $P(500 - \alpha \leqslant X \leqslant 500 + \alpha) \approx 0,95$.

Partie B

Une association de consommateurs a testé un lot de 200 bouteilles issues de cette chaine de production. Il a été constaté que 15 bouteilles contiennent moins de 500 ml de jus de fruit contrairement à ce qui est annoncé sur l'étiquetage; donc la fréquence observée de bouteilles contenant au moins 500 ml de jus de fruit est $f = \dfrac{200-15}{200} = 0,925$.
L'entreprise qui assure le conditionnement de ce jus de fruit affirme que 97 % des bouteilles produites contiennent au moins 500 millilitres de jus de fruit; donc la probabilité que la bouteille soit conforme est $p = 0,95$.
On va déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %; les conditions de détermination de cet intervalle sont $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.
Or $n = 200 > 30$, $np = 200 \times 0,97 = 194 > 5$ et $n(1-p) = 200 \times 0,03 = 6 > 5$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est : $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

Donc : $I = \left[0,97 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{200}} ; 0,97 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,94; 1]$

$f = 0,925 \notin I$ donc le test réalisé par l'association remet en cause l'affirmation de l'entreprise.

Retour à la liste des corrigés

∽ Corrigé du baccalauréat ES/L – Métropole-La Réunion ∾
24 juin 2015

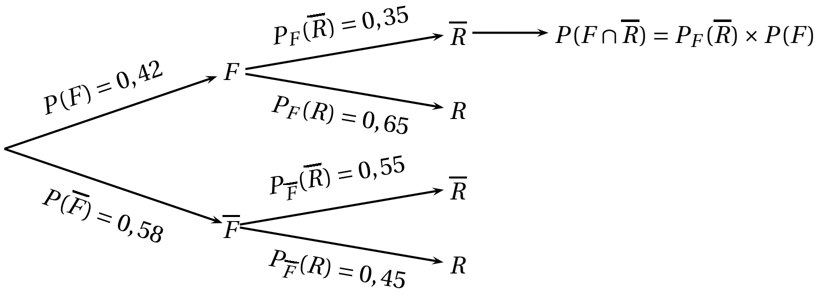
Corrigé : Philippe Logel

Exercice 1 **6 points**

commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. $P(F \cap \overline{R}) = P_F(\overline{R}) \times P(F) = 0,65 \times 0,42 = 0,273$

3. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap F) + P\left(R \cap \overline{F}\right) \\ &= P_F(R) \times P(F) + P_{\overline{F}}(R) \times P\left(\overline{F}\right) \\ &= 0,65 \times 0,42 + 0,45 \times 0,58 \\ &= 0,273 + 0,261 \\ &= 0,534 \end{aligned}$$

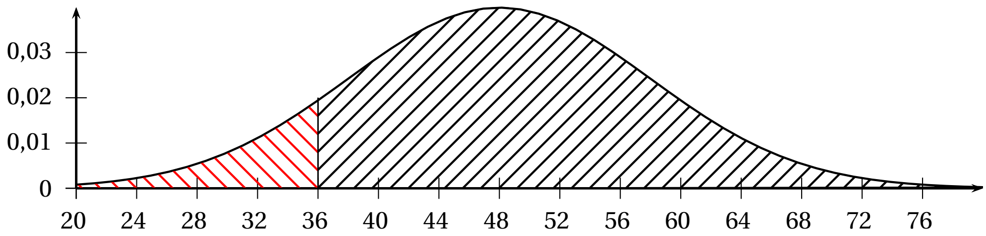
Partie B

Ici X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 48$ et $\sigma = 10$.

1. Nous calculons ici :

$P(X > 36) = 1 - P(X \leqslant 36) \approx 1 - 0,115 \approx 0,885$

En effet :



2. Nous calculons ici :

$$\begin{aligned} P_{X>3\times 12}(X < 5 \times 12) &= P_{X \geqslant 36}(X \leqslant 60) \quad \text{(C'est une loi continue)} \\ &= \frac{P(36 \leqslant X \leqslant 60)}{P(X \geqslant 36)} \\ &\approx \frac{0,76986}{0,884930} \\ &\approx 0,870 \end{aligned}$$

Partie C

1. Nous savons que :

- $p = 0,3$ la proportion.
- $n = 1\,500$ et $n \geqslant 30$
- $n \times p = 450$ et $450 \geqslant 5$

- $n \times (1-p) = 1\,050$ et $1\,050 \geqslant 5$.
  L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence vaut :

$$I = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

En effectuant les calculs, nous obtenons : $I = [0,276\ ;\ 0,323]$

2. La fréquence observée pour l'échantillon vaut : $f = \dfrac{430}{1\,500} \approx 0,287$. Ici $f \in I$, $p = 0,3$ est donc acceptable.

Exercice 2 **5 points**

candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_3 = 2000 \times 1,008^2 \approx 2\,032,13$. Le coût après 30 m de forage est de 2 032,13 €.
2. **a.** Nous pouvons calculer :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2\,000 \times 1,008^{n+1-1} \\ & = & 2\,000 \times 1,008^{n-1+1} \\ & = & 2\,000 \times 1,008^{n-1} \times 1,008 \\ & = & u_n \times 1,008 \end{array}$$

(u_n) est géométrique de raison : $q = 1,008$.

b. $u_{n+1} = 1,008 \times u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{0,8}{100}\right) \times u_n$.

Pour passer de n à $n+1$ le coefficient multiplicateur vaut : $\left(1 + \dfrac{0,8}{100}\right)$.

Le pourcentage d'augmentation permettant de passer de n à $n+1$ vaut donc : $t = 0,8$ %.

3. **a.**

valeurs de i		2	3	4	5
Valeur de u	2 000	2 016	2 032,128	2 048,38	2 064,77
Valeur de S	2 000	4 016	6 048,128	≈8 096,51	≈10 161,29

b. La sortie donne : ≈ 10161,29. C'est le coût de forage à 50 mètres de profondeur.

4. **a.** On recherche le plus petit entier de n pour lequel :

$$\begin{array}{rcl} S_n & > & 125\,000 \\ -250\,000 + 250\,000 \times 1,08^n & > & 125\,000 \\ 250\,000 \times 1,008^n & > & 375\,000 \\ 1,008^n & > & \dfrac{375}{250} \\ \ln(1,008^n) & > & \ln\left(\dfrac{375}{250}\right) \\ n \ln 1,008 & > & \ln\left(\dfrac{375}{250}\right) \\ n & > & \ln\left(\dfrac{375}{250}\right) \div \ln(1,008) \\ n & > & 50,885 \end{array}$$

Le coût est supérieur à 125 000 pour n plus grand que 509 mètres.

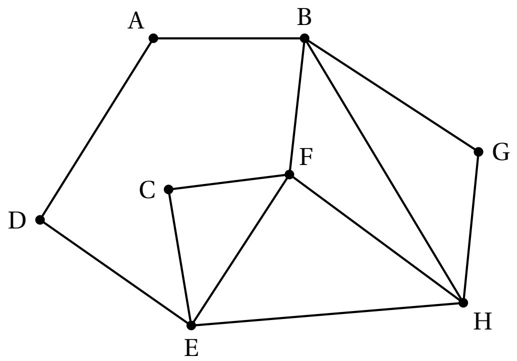
b. Voici l'algorithme modifié :

Variables :	n dans $\mathbb{N}$
	u, S dans $\mathbb{R}$
Initialisation :	u prend la valeur 2 000
	S prend la valeur 2 000
	n prend la valeur 1
Traitement :	**tant que** $S \leqslant 125\,000$ **faire**
	u prend la valeur $u * 1,008$
	S prend la valeur $S + u$
	n prend la valeur $n + 1$
	fin tant que
Sortie :	Afficher n

EXERCICE 2 — **5 points**

candidats ayant suivi l'enseignement de spécialitée

Partie A



1. **a.** Ce graphe Γ possède 8 sommets et c'est un graphe connexe, la chaîne A-B-G-H-F-C-E-D passe par tous les sommets, deux sommets quelconques seront toujours reliés par une chaîne.

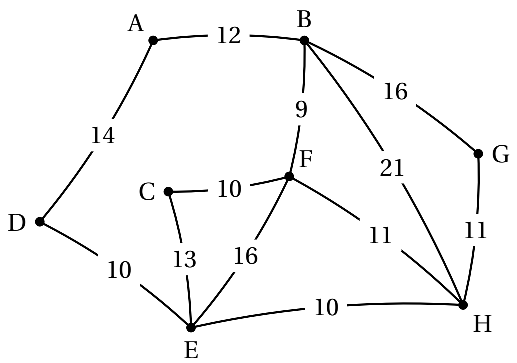
   b. Tableau des sommets degrés

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	2	4	2	2	4	4	2	4

   Le graphe a tous ses sommets de degré pair, étant connexe, il admet un cycle Eulérien d'après le théorème d'Euler, donc à fortiori une chaîne eulérienne.

2. Le nombre de chemin de longueur 3 reliant E à B est donné par $M_{25}^{(3)} = 5$, il y 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B



1. **a.** Nous avons déjà répondu à la question dans la partie A 1. b.

   Voici un exemple de cycle : A-B-F-C-E-F-H-B-G-H-E-D-A .(nous avons utilisé ici l'algorithme d'Euler).

   b. Nous cherchons ici tous les chemins de longueurs 3 reliant le refuge E au refuge B. Il y en a 5 (d'après la question 2. b. de la partie A).

   Voici les chemins possibles : E-C-F-B   E-H-F-B   E-D-A-B   E-H-G-B   E-F-H-B.

2. Pour déterminer la distance la plus courte entre A et H, nous utiliserons l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	select
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
|	12 (A)	∞	14 (A)	∞	∞	∞	∞	B(12)
|	|	∞	14 (A)	∞	21 (B)	28 (B)	33 (B)	D(14)
|	|	∞	|	24 (D)	21 (B)	28 (B)	33 (B)	F(21)
|	|	31 (F)	|	24 (D)	|	28 (B)	32 (F)	E(24)
|	|	31 (F)	|	|	|	28 (B)	32 (F)	G(28)
|	|	31 (F)	|	|	|	|	32 (F)	C(31)
|	|	|	|	|	|	|	32 (F)	H(32)

La distance la plus courte vaut : 32

La chaîne qui la réalise vaut : A-B-F-H.

L'itinéraire le plus court reliant A à H fait donc 32 km et passe par les sommets suivants : A-B-F-H.

EXERCICE 3 **6 points**

commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** $f'(-3) = 0$, en effet au point d'abscisse -3 la tangente à la courbe est horizontale.

   b. $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.

2. Nous savons que : $f(x) = a + (x+b)\,e^{-x}$.

   a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = 0 + 1 \times e^{-x} - e^{-x} \times (x+b)$.

   b. Comme :
   - $f'(-3) = 0 \Rightarrow 1 \times e^{-x} - e^{-0} \times (0+b) = -3 \Rightarrow 1 - b = -3$.
   - $f(0) = 2 \Rightarrow a + (0+b) \times e^{-0} = 2 \Rightarrow a + b = 2$.

   c. De la question précédente, nous déduisons le système suivant et sa résolution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 2 \\ 1-b & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2-b \\ b & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & 4 \end{array}\right.$$

   Conclusion : $f(x) = -2 + (x+4)\,e^{-x}$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & e^{-x} - e^{-x} \times (x+4) \\ & = & e^{-x}(1-(x+4)) \\ & = & e^{-x}(-x-3) \end{array}$$

   Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ ne dépendra que de $-x-3$.

   Nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	-4		-3		3
$-x-3$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	↗	$-2+e^3$	↘	$-2+7e^{-3}$

   Avec les valeurs suivantes :
   - $f(-4) = -2 + (-4+4)\,e^4 = -2$
   - $f(-3) = -2 + (-3+4)\,e^3 = -2 + e^3 \approx 18,09$

- $f(3) = -2 + (3+4)\,e^{-3} \approx -1,651$

2.
- sur [-3 ; 3], f est strictement décroissante.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur [-3 ; 3].
- 0 est compris entre $f(-3)$ et $f(3)$. Nous les avons calculé ci-dessus.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction f sur [-3 ; 3], $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans cet intervalle.
Avec la calculatrice, nous trouvons : $\alpha \approx 0,895 \approx 0,90$.

3. **a.** Sur l'intervalle [-3 ; 0], la fonction admet un minimum atteint pour $x = 0$ et qui vaut : $f(0) = 2$.
On en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-3;0]$.
Ainsi l'aire comprise entre les axes d'équations $x = -3$, $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f vaut :

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Une primitive de f vaut F, d'après la copie d'écran donnée dans le sujet. En effet :

$$F'(x) = x \times e^{-x} + 4 \times e^{-x} - 2 = (x+4) \times e^{-x} - 2 = -2 + (x+4)\,e^{-x}.$$

Calculons ensuite :
- $F(-3) = -2 \times (-3) + (+3-5)\,e^{+3} = -2\,e^{3} + 6$
- $F(0) = -2 \times 0 + (-0-5)\,e^{-0} = -5$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [F(x)]_{-3}^{0} \\
&= F(0) - F(-3) \\
&= -5 - \left(-2\,e^{3} + 6\right) \\
&= 2\,e^{3} - 11 \\
&\approx 29,17 \text{ U.A.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

Cette fonction est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$
- $f'(x) = 3 - 3\ln x - 3x \times \dfrac{1}{x} = -3\ln x.$
- $f''(x) = -\dfrac{3}{x}.$

Sur $\mathbb{R}_+^\star$, $f''(x) < 0$, f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Nous en déduisons que f est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Toutes ses tangentes sont donc au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, plus particulièrement la tangente T au point d'abscisse 1.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Polynésie 9 septembre 2015

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Partie A

À une roue de loterie dans une fête foraine, la probabilité annoncée de gagner une partie est égale à 0, 12.
Un joueur a la possibilité de jouer plusieurs parties.

1. Un joueur achète un carnet de tickets permettant de faire quatre parties. La valeur la plus approchée de la probabilité que le joueur gagne une seule fois sur les quatre parties est :

   $\boxed{\textbf{a. } 0{,}327\,1}$ **b.** 0,000 2   **c.** 0,482 4   **d.** 0,121 5

   La variable aléatoire X qui donne le nombre de parties gagnées suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,12$. On cherche $P(X = 1)$.

2. Après avoir gagné une partie, le joueur a la possibilité d'emporter son lot ou de le remettre en jeu. La probabilité qu'un joueur emporte son lot sachant qu'il a gagné est 0,8. La valeur la plus approchée de la probabilité qu'il parte avec son lot après une seule partie est :

   a. 0,024   **b.** 0,12 $\boxed{\textbf{c. } 0{,}096}$ **d.** 0,8

   En construisant un arbre pondéré, on suit le chemin : $0,12 \times 0,8 = 0,096$

3. On modélise le nombre de parties jouées par jour à cette loterie par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
   Une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(140 < X < 160)$ est :

   a. 0,954 $\boxed{\textbf{b. } 0{,}683}$ **c.** 0,997   **d.** 0,841

   On connaît $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,68$.

Partie B

4. La fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$, a pour expression :

   a. $(-x - 1)\mathrm{e}^{-x}$ **b.** $(-2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$ **c.** $(2x + 3)\mathrm{e}^{-x}$ $\boxed{\textbf{d. } (-2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}}$

   On applique la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

5. Soit un nombre réel strictement positif a.
   Parmi ces suites d'inégalités quelle est l'inégalité correcte ?

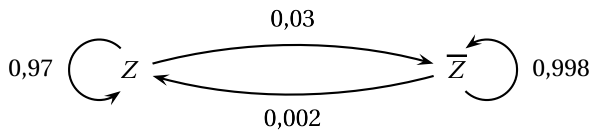
   a. $a < \ln a < \mathrm{e}^a$ **b.** $\mathrm{e}^a < a < \ln a$ **c.** $\ln a < \mathrm{e}^a < a$ $\boxed{\textbf{d. } \ln a < a < \mathrm{e}^a}$

   Il suffit de tracer les trois courbes d'équations $y = \ln x$, $y = x$ et $y = \mathrm{e}^x$ pour s'en convaincre.

Exercice 2 — Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\overline{Z}$:



2. **a.** D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,97\,a_n + 0,002\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,03\,a_n + 0,998\,b_n \end{array}\right.$

   Autrement dit : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,002 & 0,998 \end{pmatrix}$

   La matrice de transition de l'état n à l'état $n + 1$ est donc $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,002 & 0,998 \end{pmatrix}$

b. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\0,002 & 0,998\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,4\times 0,97 + 0,6\times 0,002 & 0,4\times 0,03+0,6\times 0,998\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}0,388+0,0012 & 0,012+5988\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,3892 & 0,6108\end{pmatrix}$

3. Pour que l'objectif de la municipalité soit atteint, il faudrait que le pourcentage d'automobiles en ZTL soit ramené à la moitié de 40 % en deux ans, c'est-à-dire à 20 % en 24 mois.

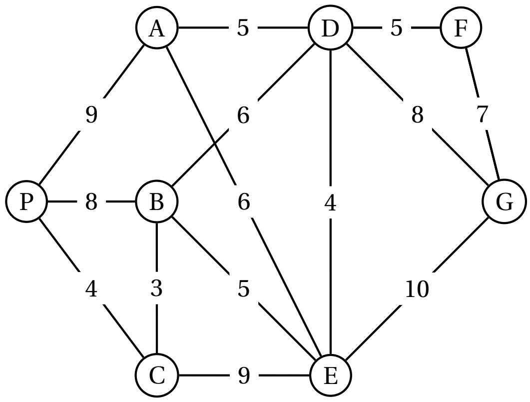
D'après le cours, on sait que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n = P_0 \times M^n$.

À la calculatrice on obtient $P_{24} = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\0,002 & 0,998\end{pmatrix}^{24} \approx \begin{pmatrix}0,2171 & 0,7829\end{pmatrix}$

Donc $a_{24} \approx 0,2171 > 0,20$ donc l'objectif affiché par la municipalité ne sera pas atteint.

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Sur ce graphe, c'est assez facile de trouver un itinéraire reliant le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites :

P – B – C – E – A – D – F – G

Note du correcteur

Rechercher dans un graphe un trajet qui passe une et une seule fois par tous les sommets, c'est chercher un chemin hamiltonien ; cette notion n'est pas au programme de la spécialité en ES mais dans le graphe proposé ici, il n'y avait guère de difficulté pour répondre à la question.

Il n'existe pas – à ma connaissance – de condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe admette un chemin hamiltonien.

2. On cherche un chemin qui emprunte une et une seule fois toutes les voies et qui relie P à G, autrement dit un chemin eulérien.

Or, d'après le théorème d'Euler, il existe un chemin eulérien dans un graphe si et seulement si tous les sommets ou tous les sommets sauf 2 sont de degrés pairs. Tous les sommets de ce graphe sont de degrés impairs sauf F, donc il n'existe aucun itinéraire qui emprunte une et une seule fois toutes les voies.

3. On va déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G au moyen de l'algorithme de Dijkstra :

P	A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	P
	9 P	8 P	4 C	∞	∞	∞	∞	C
	9 P	~~8 P~~ 7 C		∞	13 C	∞	∞	B
	9 P			13 B	13 C	∞	∞	A
				13 B ~~14 A~~	13 C ~~15 A~~	∞	∞	D
					13 C	18 D	21 D	E
						18 D	21 D ~~23 E~~	F
							21 D ~~25 F~~	G

Le chemin le plus rapide de P vers G est d'une durée de 21 minutes :

$$\text{P} \xrightarrow{4} \text{C} \xrightarrow{3} \text{B} \xrightarrow{6} \text{D} \xrightarrow{8} \text{G}$$

Exercice 3 Commun à tous les candidats 5 points

Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

1. La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point E d'abscisse 0,6 ; graphiquement on voit que son ordonnée est approximativement de 0,3.
   $u(0,6) = 0,6 \times 0,6^2 + 0,4 \times 0,6 = 0,456$ et $v(0,6) = 0,7 \times 0,6^3 + 0,1 \times 0,6^2 + 0,2 \times 0,6 = 0,3072$
   Donc la courbe $\mathscr{C}$ est la représentation de la fonction v, et donc la courbe représentative de la fonction u est $\mathscr{C}'$.
   On a alors :

Filiale	A	B
Fonction	u	v
Courbe	$\mathscr{C}'$	$\mathscr{C}$

2. **a.** Pour avoir le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires, on calcule $u(0,5)$ que l'on exprimera en pourcentage.
   $u(0,5) = 0,6 \times 0,5^2 + 0,4 \times 0,5 = 0,35$ donc 50 % des salariés ayant les plus bas salaires dans la filiale A se partagent 35 % de la masse salariale.

   b. $v(0,5) = 0,7 \times 0,5^3 + 0,1 \times 0,5^2 + 0,2 \times 0,5 = 0,2125$; donc 50 % des salariés ayant les plus bas salaires dans la filiale B se partagent 21,25 % de la masse salariale.
   Donc pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, c'est la filiale A qui distribue la plus grande part de la masse salariale.

   c. D'après la question précédente, c'est la filière B qui semble avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire.

3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

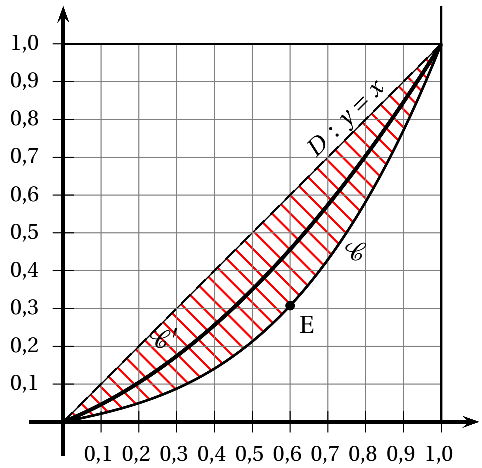
   a. $c_u = 2\left(\dfrac{1}{2} - \displaystyle\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x\right)$
   Une primitive U de la fonction u sur $[0 ; 1]$ est définie par :
   $U(x) = 0,6\dfrac{x^3}{3} + 0,4\dfrac{x^2}{2} = 0,2x^3 + 0,2x^2$; $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x = U(1) - U(0) = 0,4$
   Donc $c_u = 2(0,5 - 0,4) = 0,2$

b.

$c_v = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x\right)$ donc $\frac{c_v}{2} = \frac{1}{2} - \int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$

De plus, $\frac{1}{2}$ est la moitié de l'aire du carré de côté 1, donc c'est l'aire du domaine compris entre la droite d'équation $y = x$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$; autrement dit $\frac{1}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.

$\int_0^1 v(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



Donc $\frac{c_v}{2}$ représente l'aire du domaine hachuré sur le graphique ci-dessus.

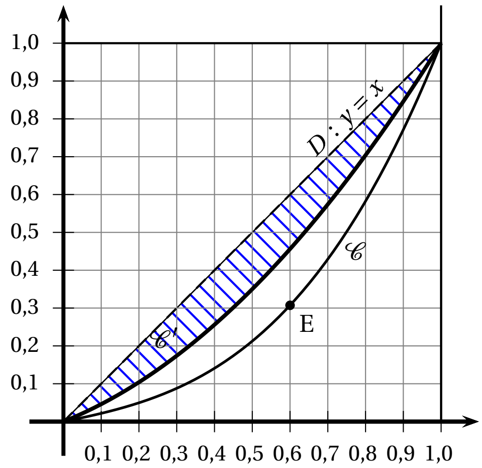
c. L'aire du domaine hachuré est plus petite que 0,5 donc $c_v \leqslant 1$.
De plus, c_v représente une aire donc est positive : $0 \leqslant c_v \leqslant 1$

d. De la même manière, on prouverait que $\frac{c_u}{2}$ est égal à l'aire du domaine hachuré dans le graphique ci-contre.

En comparant les aires, on en déduit que

$$\frac{c_u}{2} \leqslant \frac{c_v}{2}$$

et donc que $c_u \leqslant c_v$

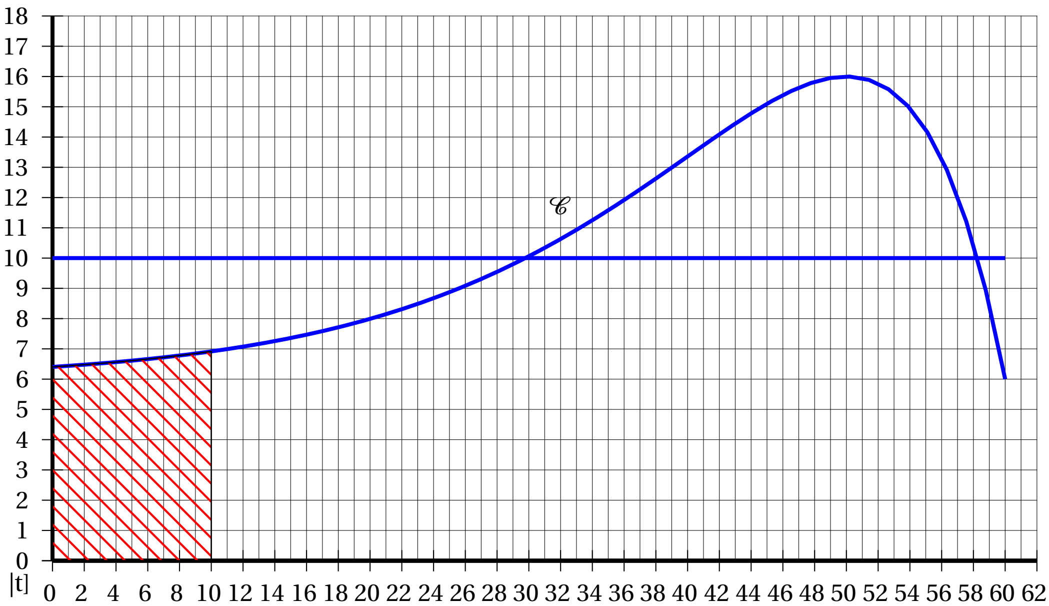


Exercice 4 Commun à tous les candidats 5 points

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
On donne page suivante la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction P :

Partie A

1. Autour de $x = 54$, la fonction P est décroissante donc le nombre dérivé $P'(54)$ est négatif.
2. D'après le graphique, la fonction P est convexe sur l'intervalle $[10 ; 30]$.
3. Pour déterminer graphiquement les solutions de l'équation $P(x) = 10$, on trace la droite d'équation $y = 10$.
   Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de cette droite et de la courbe $\mathscr{C}$.
   Les solutions de l'équation $P(x) = 10$ sont, à l'unité près, 30 et 58.
4. On note A le nombre $\int_0^{10} P(x)\,\mathrm{d}x$; il correspond à l'aire du domaine hachuré sur le graphique.
   Donc $60 < A < 70$



Partie B

La fonction P est définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par : $P(x) = 6 + (60 - x)\,\mathrm{e}^{0,1x-5}$

1. **a.** D'après les résultats donnés par le logiciel de calcul formel, $P'(x) = (-0,1x+5)\,\mathrm{e}^{0,1x-5}$
Pour tout x, $\mathrm{e}^{0,1x-5} > 0$ donc $P'(x)$ est du signe de $-0,1x+5$ c'est-à-dire :

- strictement positif si $-0,1x+5>0$ soit sur $[0\,;50[$;
- strictement négatif si $-0,1x+5<0$ soit sur $]50\,;60]$.

b. D'après la question précédente, on peut dire que :

- la fonction P est strictement croissante sur $[0\,;50]$;
- la fonction P est strictement décroissante sur $[50\,;60]$;
- la fonction P admet un maximum en $x = 50$ qui vaut $P(50) = 16$.

2. $P(0) \approx 6,4 < 10$ et $P(60) = 6$
On peut établir le tableau de variations de la fonction P sur $[0\,;60]$:

x	0	x_0	50	60
$P(x)$	$\approx 6,4$	10	16	6

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $P(x) = 10$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;50]$.

$$\left.\begin{array}{lcl} P(29) & \approx & 9,8 \\ P(30) & \approx & 10,1 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 \in [29\,;30] \qquad \left.\begin{array}{lcl} P(29,7) & \approx & 9,98 \\ P(29,8) & \approx & 10,01 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 \in [29,7\,;29,8]$$

Donc 29,7 est une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

3. La fonction P est convexe sur les intervalles sur lesquels sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes, ce qui correspond aux intervalles sur lesquels la fonction dérivée est croissante, ce qui correspond aux intervalles sur lesquels la fonction dérivée seconde est positive.
D'après les résultats donnés par le logiciel de calcul formel, $P''(x) = (-0,01x+0,4)\,\mathrm{e}^{0,1x-5}$.
$P''(x) > 0 \iff -0,01x+0,4>0 \iff 0,4 > 0,01x \iff 40 > x$
Donc la fonction P est convexe sur $[0\,;40[$ et concave sur $]40\,;60]$.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Antilles-Guyane septembre 2015

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Soit la fonction f définie sur [1 ; 100] par $f(x) = 200\ln x + 10x$, $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de f. On a :

   a. $f'(x) = 200 + \dfrac{1}{x}$ **b.** $\boxed{f'(x) = \dfrac{200}{x} + 10}$ **c.** $f'(x) = 200 + 10x$ **d.** $f'(x) = \dfrac{200}{x} + 10x$

   La dérivée de la fonction ln est $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

2. On note L une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction ln. Cette fonction L est :

   a. croissante puis décroissante
   b. décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$
   c. croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
   d. $\boxed{\text{décroissante puis croissante}}$

   La fonction ln est négative sur $]0\,;1[$ puis positive donc n'importe laquelle de ses primitives est décroissante puis croissante.

3. La fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$ est :

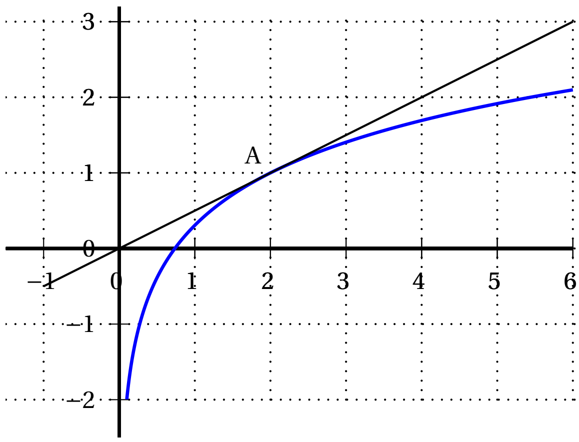
   a. $\boxed{\text{convexe sur }]0\,;\,+\infty[}$
   b. concave sur $]0\,;\,+\infty[$
   c. ni convexe ni concave sur $]0\,;\,+\infty[$
   d. change de convexité sur $]0\,;\,+\infty[$

   $g(x) = x - \ln x$ donc $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et donc $g''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   $g''(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$, donc g est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

4. On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2. Par lecture graphique, on peut conjecturer que :

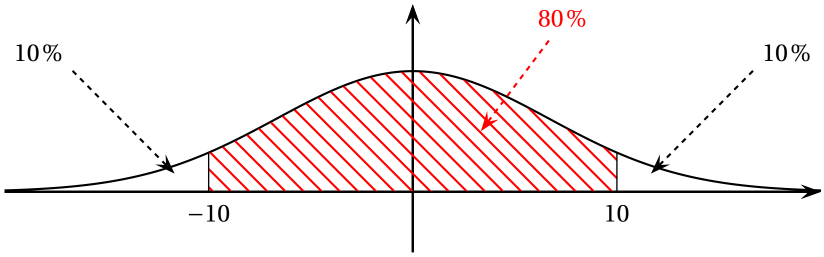
   a. $h'(2) = 2$
   b. $\boxed{h'(2) = \dfrac{1}{2}}$
   c. $h'(2) = 0$
   d. $h'(2) = 1$



   $h'(2)$ est le coefficient directeur de la droite tracée soit $\dfrac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \dfrac{1}{2}$.

5. La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type σ inconnu mais on sait que $P(-10 < X < 10) = 0,8$. On peut en déduire :
   a. $P(X < 10) = 0,1$
   b. $P(X < 10) = 0,2$
   c. $P(X < 10) = 0,5$
   d. $\boxed{P(X < 10) = 0,9}$

   Un petit dessin peut expliquer la réponse :

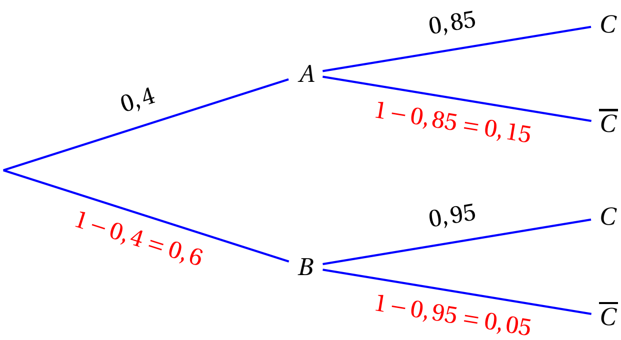


EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

PARTIE A

1. On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. L'événement « la pomme n'est pas commercialisable » est l'événement $\overline{C}$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap A) + P(\overline{C} \cap B) = P(A) \times P_A(\overline{C}) + P(B) \times P_B(\overline{C}) = 0,4 \times 0,15 + 0,6 \times 0,05 = 0,06 + 0,03 = 0,09$
3. Il s'agit, dans cette question, de comparer $P_{\overline{C}}(A)$ et $P_{\overline{C}}(B)$.
   $P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,06}{0,09} = \dfrac{2}{3}$; $P_{\overline{C}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,03}{0,09} = \dfrac{1}{3}$
   Donc le responsable des achats a raison quand il dit qu'une pomme non commercialisable a deux fois plus de chance de provenir du fournisseur A que du fournisseur B.

PARTIE B

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de pommes commercialisables suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 1 - 0,09 = 0,91$.

1. La probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables est :
   $P(X = 15) = \dbinom{15}{15} 0,91^{15}\, 0,09^0 \approx 0,243$

2. La probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables est :

$$P(X \geqslant 14) = P(X=14)+P(X=15) = \binom{15}{14} 0,91^{14}\, 0,09^{1} + \binom{15}{15} 0,91^{15}\, 0,09^{0} \approx 0,3605+0,2430 \approx 0,604$$

PARTIE C

Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 200 pommes. Il s'aperçoit que 22 pommes sont non commercialisables.
$n = 200 \geqslant 30$; $np = 200 \times 0,09 = 18 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 200(1-0,09) = 182 \geqslant 5$
donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de pommes non commercialisables :

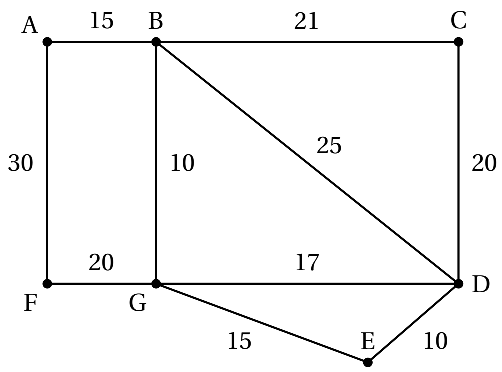
$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ ce qui donne pour $p = 0,09$ et $n = 200$:
$I = \left[0,09 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,09 \times 0,91}}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,09 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,09 \times 0,91}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,050\,;\,0,130]$

La fréquence de pommes non commercialisables dans l'échantillon est $f = \dfrac{22}{200} = 0,11$.
$f \in I$ donc le résultat est conforme à ce qu'on pouvait attendre.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe ci-contre schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A

Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6 ligne 7	|visiter le village et le marquer « visité » |rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Le graphe est connexe, donc il y a au moins une arête qui part de n'importe quel sommet, et donc une arête de poids minimum qui part de ce sommet.
2. En partant du village G que l'on visite, on roule vers le village B (distance 10) que l'on visite, puis vers le village A (distance 14), enfin vers le village F (distance 30). De F, on ne peut se rendre que dans un village déjà visité, G ou A, donc G puisqu'on ne revient pas en arrière ; comme le village est déjà visité, on sort de la boucle « tant que ».

$$\text{G} \xmapsto{10} \text{B} \xmapsto{15} \text{A} \xmapsto{30} \text{F} \xmapsto{20} \text{G}$$

3. La question posée revient à chercher si, en suivant cet algorithme, on peut visiter les villages C, D et E avant le village G. La réponse est positive, il suffit de partir du village C :
$$\text{C} \xmapsto{20} \text{D} \xmapsto{10} \text{E} \xmapsto{15} \text{G} \xmapsto{10} \text{B} \xmapsto{15} \text{A} \xmapsto{30} \text{F}$$

4. Partir d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois, c'est chercher un cycle eulérien ou un chemin eulérien dans ce graphe.

   D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe admet un chemin eulérien si et seulement s'il possède exactement deux sommets de degrés impairs, et il possède des cycles eulériens si tous les sommets sont de degrés pairs.

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	2	4	2	4	2	2	4

   Dans ce graphe, tous les sommets sont de degré pair, donc il existe au moins un cycle eulérien partant de chaque sommet.

   Par exemple : AB – BC – CD – DB – BG – GD – DE – EG – GF – FA est un parcours partant de A et revenant à A, qui passe par les 10 pistes cyclables une et une seule fois.

Partie B

1. La matrice M de transition de ce graphe est :
$$\begin{array}{c} \\ A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   On met un 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j s'il y a dans le graphe une arête qui relie le sommet de la ligne i au sommet de la colonne j ; sinon on met un 0.

2. On donne la matrice M^4 :
$$\begin{array}{c} \\ A\\B\\C\\D\\E\\F\\G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10&5&9&11&4&\mathbf{1}&16\\ 5&30&12&23&18&16&16\\ 9&12&12&14&9&4&18\\ 11&23&14&28&14&11&23\\ 4&18&9&14&12&9&12\\ 1&16&4&11&9&10&5\\ 16&16&18&23&12&5&30 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Le terme en gras, ligne A, colonne F (valant 1), donne le nombre de chemins contenant 4 arêtes (la puissance de la matrice M) reliant le sommet A au sommet F ; ce chemin est $AB-BD-DG-GF$.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Son objectif est de constituer un capital de 18 000 euros.
Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 2 400 euros.

1. Les 1 000 euros placés en 2010 à 2 % produisent $1\,000 \times \dfrac{2}{100} = 20$ euros d'intérêt.

   Le capital au 1er janvier 2011 après le versement annuel est $1\,000+20+2\,400 = 3\,420$ euros.

2. On veut déterminer la somme présente sur le compte après un certain nombre d'années.
On donne ci-dessous trois algorithmes :

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Affecter 1 000 à U
Pour i de 1 à N faire
| Affecter $1,02 \times U + 2400$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin traitement

algorithme 1

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Pour i de 1 à N faire
| Affecter 1 000 à U
| Affecter $1,02 \times U + 2400$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin traitement

algorithme 2

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Affecter 1 000 à U
Pour i de 1 à N faire
| Affecter $1,02 \times U + 2400$ à U
| Affecter $N+1$ à N
Fin Pour
Afficher U
Fin traitement

algorithme 3

a. Pour $N = 5$, on remplit le tableau avec les valeurs données par l'algorithme 1 :

valeur de i	xxx	1	2	3	4	5
valeur de U	1 000	3 420	5 888,40	8 406,17	10 974,29	13 593,78

b. La valeur affichée par l'algorithme 1 pour $N = 5$ est 13 593,78 ; c'est le montant du capital obtenu après versement annuel le 1er janvier 2010 + 5 soit 2015.

c.
- Dans l'algorithme 2, on affecte 1 000 à U à l'intérieur de la boucle « pour » ; l'algorithme donnera donc toujours comme résultat $1,02 \times 1000 + 2400 = 3420$, quelle que soit la valeur de N entrée.
- Dans l'algorithme 3, on modifie la valeur de N à chaque tour de boucle ; cet algorithme ne s'arrêtera jamais.

3. À partir de la naissance de son premier enfant en 2016, le couple décide de ne pas effectuer le versement du premier janvier 2017 et de cesser les versements annuels tout en laissant le capital sur ce compte rémunéré à 2 %.

La somme présente sur le compte au 1er janvier 2015 est 13 593,78 euros, donc la somme présente sur le compte au 1er janvier 2016 est : $13593,78 \times 1,02 + 2400 \approx 16265,65$ euros.

À partir de 2016, le compte rapporte 2 % et il n'y a plus de versement annuel ; donc pour passer d'une année à la suivante, il faut augmenter la somme de 2 % donc multiplier par 1,02.

Si on appelle S_n la somme présente sur le compte le 1er janvier de l'année $2016 + n$, on a donc : $S_{n+1} = 1,02 \times S_n$. La suite (S_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $S_0 = 16265,65$; on a donc pour tout entier naturel n, $S_n = S_0 \times q^n = 16265,65 \times 1,02^n$.

On cherche alors une valeur entière de n telle que $16265,65 \times 1,02^n \geqslant 18000$:

$$\begin{aligned}
16265,65 \times 1,02^n \geqslant 18000 &\iff 1,02^n \geqslant \frac{18000}{16265,65} \\
&\iff \ln\left(1,02^n\right) \geqslant \ln \frac{18000}{16265,65} && \text{croissance de la fonction ln} \\
&\iff n\ln(1,02) \geqslant \ln \frac{18000}{16265,65} && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln \frac{18000}{16265,65}}{\ln(1,02)} && \text{car } \ln(1,02) > 0
\end{aligned}$$

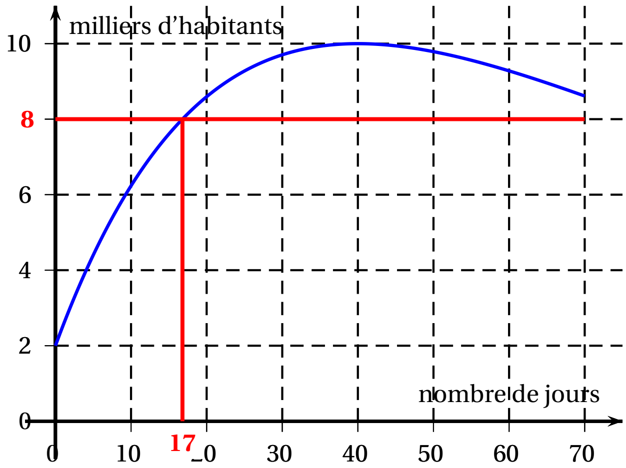
Or $\dfrac{\ln \frac{18000}{16265,65}}{\ln(1,02)} \approx 5,14$ donc l'objectif sera atteint pour $n = 6$ soit au 1er janvier 2022.

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0 ; 70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A

1. **a.** D'après le graphique, le maximum de la fonction f est $f(40) = 10$.
Le nombre 40 correspond au 10 août, et 10 correspond à 10 000 habitants.
Le nombre maximum d'habitants est donc de 10 000 et est atteint le 10 août.

   b. Chaque habitant consomme entre 45 et 55 litres d'eau ; donc 10 000 habitants consommeront entre 450 000 et 550 000 litres au maximum.
Comme la commune peut fournir 600 000 litres d'eau par jour, c'est suffisant pour la journée la plus chargée, donc pour toutes les autres.

2. Le maximum d'habitants prévus est 10 000 donc 80 % du maximum est égal à 8 000 habitants.
Chercher le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants est supérieur à 80 % du nombre maximal prévu, revient à résoudre sur l'intervalle $[0 ; 70]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 8$ (voir graphique).
$f(x) \geqslant 8$ sur l'intervalle $[17 ; 70]$, soit pendant 53 jours.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 70]$ par $f(x) = 2 + 0,2x\,\mathrm{e}^{-0,025x+1}$

1. $f(9) = 2 + 0,2 \times 9 \times \mathrm{e}^{-0,025\times 9+1} \approx 5,90706$
$x = 9$ correspond au 10 juillet ; il y a une estimation de $5,907 \times 1\,000 = 5\,907$ habitants à cette date.
Chaque habitant consomme au maximum 55 litres, donc la consommation d'eau maximale le 10 juillet sera de $5907 \times 55 \approx 324\,885$ litres que l'on peut majorer par 324 890 litres.

2. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 70]$ et :
$f'(x) = 0,2 \times 1 \times \mathrm{e}^{-0,025x+1} + 0,2x \times (-0,025)\,\mathrm{e}^{-0,025x+1} = (0,2 - 0,005x)\,\mathrm{e}^{-0,025x+1}$

   b. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-0,025x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,2 - 0,005x$.
$0,2 - 0,005x > 0 \iff 0,2 > 0,005x \iff \dfrac{0,2}{0,005} > x \iff 40 > x$

x	0		40		70
$0,2-0,005\,x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   c. D'après le signe de sa dérivée, la fonction f est croissante sur $[0 ; 40]$, puis décroissante sur $[40 ; 70]$; elle atteint donc un maximum pour $x = 40$. Cette valeur de x correspond au 10 août et à un maximum de population dans la station, donc à un maximum de consommation d'eau.

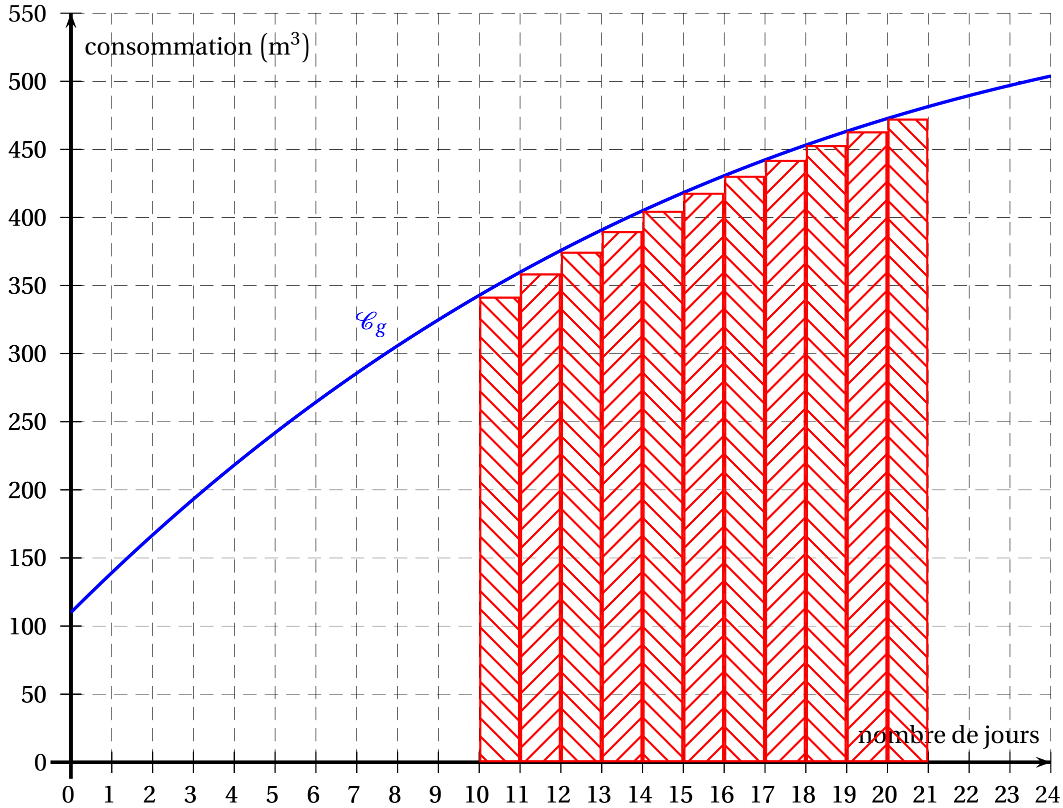
Partie C

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par $g(x) = 55f(x) = 110 + 11x\mathrm{e}^{-0,025x+1}$
Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par $G(x) = 110x - (440x + 17\,600)\mathrm{e}^{-0,025x+1}$
On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10e au 20e jour exprimée en m^3.

1. $g(10) = g(10) \times 1$ est l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de longueur $g(10)$; donc $S = g(10) + g(11) + \ldots + g(20)$ est la somme des aires des 11 rectangles représentés sur l'annexe en page **??**.
2. La fonction g est strictement positive sur $[0\,;\,70]$ donc l'aire du domaine défini par la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 10$ et $x = 21$ est $I = \displaystyle\int_{10}^{21} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   L'aire I de ce domaine est une valeur approchée de la somme S.
   La fonction G est une primitive de la fonction g donc :
   $I = \displaystyle\int_{10}^{21} g(x)\,\mathrm{d}x = G(21) - G(10) \approx -40\,849,10 - (-45\,474,00) \approx 4\,624,90$
   La quantité d'eau consommée du 10e au 20e jour est donc approximativement de 4 625 m^3.

ANNEXE

Annexe à l'exercice 4 à rendre avec la copie



Retour à la liste des corrigés

∽ Corrigé du baccalauréat ES/L – Métropole-La Réunion ∾
11 septembre 2015

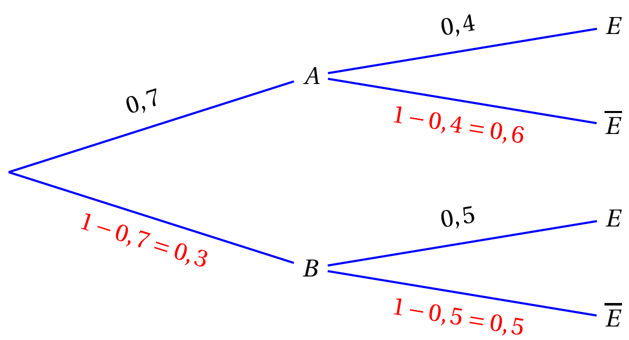
EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **7 points**

Lors d'une opération promotionnelle, un magasin d'électroménager propose deux modèles de téléviseurs : un modèle A et un modèle B.
On s'intéresse aux acheteurs qui profitent de cette promotion.
70 % des acheteurs choisissent un téléviseur de modèle A.
Pour ces deux téléviseurs, le magasin propose une extension de garantie de 5 ans.
40 % des acheteurs du téléviseur de modèle A choisissent l'extension de garantie et 50 % des acheteurs du téléviseur de modèle B choisissent cette extension.
On interroge au hasard un acheteur à la sortie du magasin.
Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième. Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.
On note :
A l'évènement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle A » ;
B l'évènement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle B » ;
E l'évènement « Un acheteur choisit l'extension de garantie »,

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Partie A

1. On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. L'événement « choix du modèle A avec extension de garantie » est l'événement $A \cap E$.
D'après l'arbre : $p(A \cap E) = p(A) \times p_A(E) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$
3. On calcule $p(E)$ en utilisant la formule des probabilités totales :
$p(E) = p(A \cap E) + p(B \cap E) = 0,28 + 0,3 \times 0,5 = 0,28 + 0,15 = 0,43$
4. Un acheteur n'a pas pris l'extension de garantie ; on cherche la probabilité qu'il ait acheté le modèle A, c'est-à-dire $p_{\overline{E}}(A)$.
$p_{\overline{E}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{E})}{p(\overline{E})} = \dfrac{0,7 \times 0,6}{1 - 0,43} = \dfrac{0,42}{0,57} \approx 0,737$

Partie B

Le directeur du magasin interroge au hasard 210 clients et note que 123 trouvent l'opération promotionnelle qu'il propose intéressante.
La fréquence de clients trouvant l'opération promotionnelle intéresante est $f = \dfrac{123}{210}$.

On regarde si les conditions pour déterminer un intervalle avec un niveau de confiance de plus de 95 % sont réunies : $n = 210 \geqslant 30$; $nf = 123 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 87 \geqslant 5$. Les conditions sont donc réunies.
L'intervalle de confiance au seuil de 95 % pour la proportion de clients qui trouvent l'opération promotionnelle intéressante est donc :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{123}{210} - \frac{1}{\sqrt{210}}\,;\, \frac{123}{210} + \frac{1}{\sqrt{210}}\right] \approx [0,516\,;\,0,655]$$

Partie C

Pour sa prochaine promotion, le directeur s'intéresse à l'âge de ses clients. On modélise l'âge des clients en années par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 40$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. À la calculatrice, on trouve : $p(X > 60) \approx 0,006$
   La probabilité qu'un client ait plus de 60 ans est d'environ 0,006.
2. À la calculatrice, on trouve : $p(30 < X < 50) \approx 0,789$
   La probabilité qu'un client ait un âge compris entre 30 et 50 ans est d'environ 0,789.

EXERCICE 2 — Commun à tous les candidats — 5 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

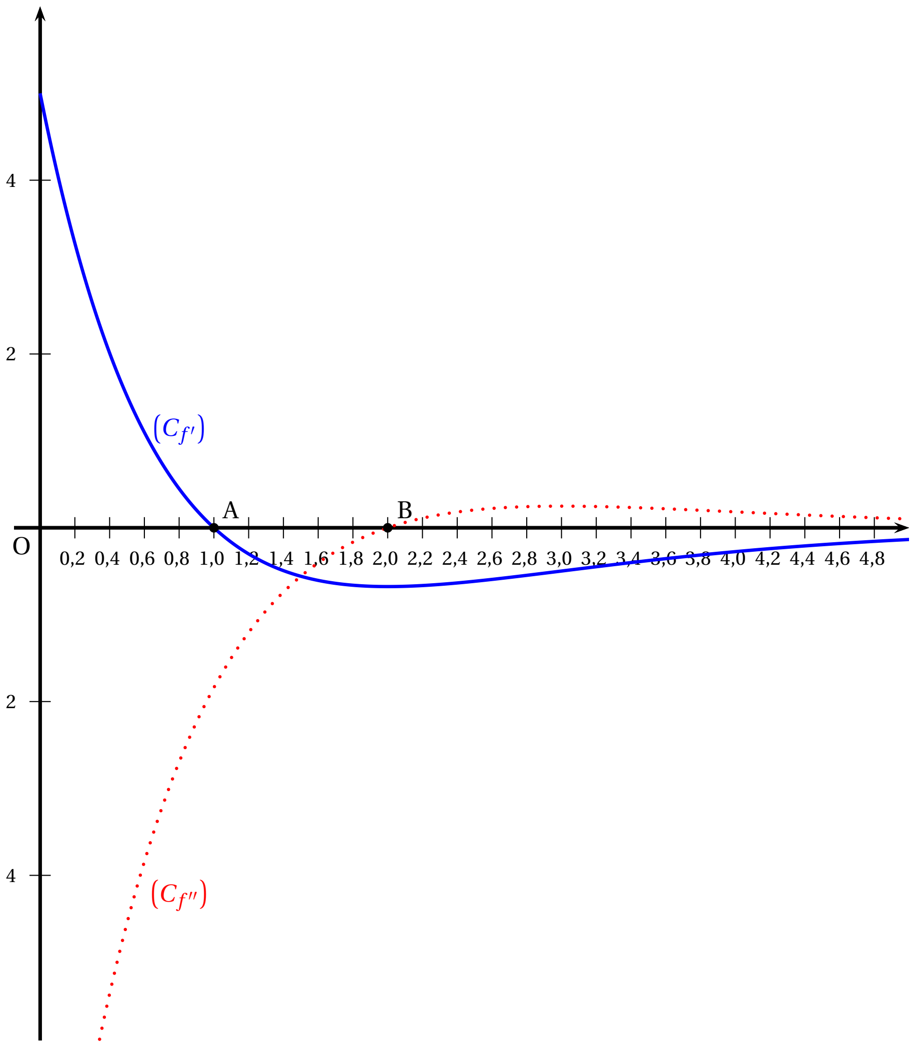
On a représenté ci-dessous la courbe $\left(C_{f'}\right)$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $\left(C_{f''}\right)$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;5]$. Le point A de coordonnées $(1\,;0)$ appartient à $\left(C_{f'}\right)$ et le point B de coordonnées $(2\,;0)$ appartient à la courbe $\left(C_{f''}\right)$.

1. La fonction dérivée f' est strictement positive sur $[0\,;1[$, et elle est strictement négative sur $]1\,;5]$; donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, et elle est strictement décroissante sur $[1\,;5]$
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la fonction dérivée seconde f'' est positive, donc sur l'intervalle $[2\,;5]$.
3. La courbe de f admet des points d'inflexion quand la dérivée seconde de la fonction f s'annule et change de signe; donc la courbe de f admet sur $[0\,;5]$ un point d'inflexion d'abscisse 2.

Partie B - Étude de la fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,5]$ par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$

1. Pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f(x) = 5x\,\mathrm{e}^{-x}$ est positive sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $F(x) = (-5x-5)\mathrm{e}^{-x}$.
   La fonction F est dérivable sur $[0\,;5]$ et
   $F'(x) = -5\,\mathrm{e}^{-x} + (-5x-5)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-5+5x+5)\,\mathrm{e}^{-x} = 5x\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$
   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;5]$.
3. La fonction f est positive sur $[0\,;5]$ donc l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est : $A = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   $A = \displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = F(5) - F(0) = -10\,\mathrm{e}^{-1} - (-5) = 5 - \frac{10}{\mathrm{e}}$
   La valeur exacte de l'aire cherchée est $5 - \dfrac{10}{\mathrm{e}}$ unité d'aire.



EXERCICE 3 — Candidats n'ayant pas suivi la spécialité, candidats de L — 5 points

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles. L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.
Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'abonnés pour l'année $(2014+n)$.
Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit $u_0 = 500$.

1. Pour calculer u_1, on prend 75 % de $u_0 = 500$, ce qui donne 375 et on ajoute 300; donc $u_1 = 675$.
   Pour calculer u_2, on prend 75 % de $u_1 = 675$, ce qui donne 506,25 et on ajoute 300, ce qui fait $806,25$; on arrondit à l'entier : $u_2 = 806$.
2. Prendre 75 % d'une somme, c'est multiplier par 0,75; de plus, chaque année il y a 300 abonnés de plus. Donc on passe du nombre d'abonnés d'une année au nombre d'abonnés de l'année suivante en multipliant par 0,75 et en ajoutant 300 : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75\,u_n + 300$.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1200$; donc $u_n = v_n + 1200$.

   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1200 = 0,75\,u_n + 300 - 1200 = 0,75(v_n + 1200) - 900 = 0,75\,u_n + 900 - 900$
   $= 0,75\,v_n$

   $v_0 = u_0 - 1200 = 500 - 1200 = -700$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -700$ et de raison $q = 0,75$.

b. La suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = -700$ et de raison $q = 0,75$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -700 \times 0,75^n$.

Or $u_n = v_n + 1200$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$

c. $u_{10} = -700 \times 0,75^{10} + 1200 \approx 1161$

$n = 10$ correspond à $2014 + 10 = 2024$; on peut donc estimer qu'il y aura 1 161 abonnés en 2024.

4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1 190.

On propose trois algorithmes :

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
Affecter à n la valeur 0	Affecter à n la valeur 0	Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500	Affecter à U la valeur 500	Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1190$	Tant que $U \leqslant 1190$	Tant que $U \leqslant 1190$
Affecter à n la valeur $n+1$	Affecter à U la valeur	Affecter à n la valeur $n+1$
Affecter à U la valeur	$-700 \times 0,75^n + 1200$	Affecter à U la valeur
$-700 \times 0,75^n + 1200$	Affecter à n la valeur $n+1$	$-700 \times 0,75^n + 1200$
Fin Tant que	Fin Tant que	Affecter à n la valeur $n+2014$
Affecter à n la valeur $n+2014$	Affecter à n la valeur $n+2014$	Fin Tant que
Afficher n	Afficher n	Afficher n

- C'est l'algorithme 1 qui permet de répondre au problème.
- Dans l'algorithme 2, il y aura un décalage de l'indice n par rapport à la valeur de U puisqu'on affecte $n+1$ à n après le calcul de U.
- Dans l'algorithme 3, on ajoute 2014 à n à l'intérieur de la boucle et on va donc avoir successivement $n = 0$ (initialisation), $n = 1$ (entrée la 1re fois dans la boucle), $n = 2015$ (sortie de la 1re boucle), puis $n = 2016$, $n = 4030$ et on sort de la boucle avec affichage de $n = 4030$ qui n'est pas la bonne réponse.

EXERCICE 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

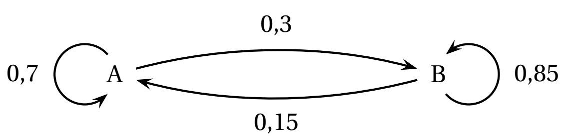
Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014 + n$;
- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014 + n$.

Comme il n'y a que deux possibilités, on peut dire que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 1$.
On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014 + n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. On représente la situation au moyen d'un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. D'après le texte, on a, pour tout entier naturel n :

$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} &=& 0,7\,a_n+0,15\,b_n \\ b_{n+1} &=& 0,3\,a_n+0,85\,b_n\end{array}\right.$ autrement dit : $\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,15 & 0,85\end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition associée à ce graphe est : $M=\begin{pmatrix}0,7 & 0,3\\0,15 & 0,85\end{pmatrix}$

3. L'année 2018 correspond à $n=4$; on cherche a_4 que l'on va obtenir en calculant P_4.
D'après le cours, on peut dire que, pour tout n : $P_n=P_0\times M^n$.
Donc $P_4=P_0\times M^4$ et on trouve à la calculatrice $P_4=\begin{pmatrix}0,357\,735 & 0,642\,265\end{pmatrix}$
La probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 est donc 0,358 (valeur arrondie au millième).

4. L'état stable $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ est solution du système S : $\left\{\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M\\ a+b &=& 1\end{array}\right.$

$\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0,7\,a+0,15\,b\\ b &=& 0,3\,a+0,85\,b\end{array}\right. \iff 0,3\,a-0,15\,b=0 \iff 2\,a=b$

$$S \iff \left\{\begin{array}{rcl}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times M\\ a+b &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}2\,a &=& b\\ a+b &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \dfrac{1}{3}\\ b &=& \dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Donc l'état stable est $P=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$.

Cela veut dire que, sur le long terme, il y aura $\dfrac{1}{3}$ des clients qui paieront en une fois et $\dfrac{2}{3}$ qui paieront mensuellement.

5. D'après les questions précédentes :

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1}=0,7\,a_n+0,15\,b_n\\ a_n+b_n=1\end{array}\right\} \Longrightarrow a_{n+1}=0,7\,a_n+0,15(1-a_n) \Longrightarrow a_{n+1}=0,7\,a_n+0,15-0,15\,a_n$$

$$\Longrightarrow a_{n+1}=0,55\,a_n+0,15$$

Donc, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,55\,a_n+0,15$.

6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n<0,333\,4$.

a. On écrit un algorithme permettant de déterminer cet entier n :

Variables	A est un réel n est un entier
Initialisation	A prend la valeur 0,6 n prend la valeur 0

Traitement	Tant que $A\geqslant 0,3334$
	    n prend la valeur $n+1$
	    A prend la valeur $0,55\times A+0,15$
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher n

b. On admet que pour tout entier naturel n, $a_n=\dfrac{4}{15}\times 0,55^n+\dfrac{1}{3}$
On cherche par le calcul la valeur de n :

$$\begin{aligned}
a_n < 0,3334 &\iff \frac{4}{15}\times 0,55^n + \frac{1}{3} < 0,3334\\
&\iff \frac{4}{15}\times 0,55^n < 0,3334 - \frac{1}{3}\\
&\iff 0,55^n < \frac{15}{4}\left(0,3334-\frac{1}{3}\right)\\
&\iff \ln\left(0,55^n\right) < \ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334-\frac{1}{3}\right)\right) && \text{croissance de la fonction ln}\\
&\iff n\ln(0,55) < \ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334-\frac{1}{3}\right)\right) && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff n > \frac{\ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334-\frac{1}{3}\right)\right)}{\ln(0,55)} && \text{car } \ln(0,55)<0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{15}{4}\left(0,3334-\frac{1}{3}\right)\right)}{\ln(0,55)} \approx 13,9$ donc le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$ est 14.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2\ln(x)$ sur $[0,2\,;\,10]$ et on note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. La fonction f est dérivable sur $[0,2\,;\,10]$ comme produit de fonctions dérivables et :
$f'(x) = 4x\times\ln(x) + 2x^2\times\dfrac{1}{x} = 4x\ln(x) + 2x = 2x(2\ln(x)+1)$

2. Soit a un réel de $[0,2\,;\,10]$.
Une équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$f(a) = 2a^2\ln(a)$ et $f'(a) = 2a(2\ln(a)+1)$; donc T a pour équation :
$y = 2a(2\ln(a)+1)(x-a) + 2a^2\ln(a) \iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a(2\ln(a)+1)\times a + 2a^2\ln(a) \iff$
$y = 2a(2\ln(a)+1)x - 4a^2\ln(a) - 2a^2 + 2a^2\ln(a) \iff y = 2a(2\ln(a)+1)x - 2a^2(\ln(a)+1)$

3. La droite T passe par l'origine si et seulement si le réel a est tel que $-2a^2(\ln(a)+1) = 0$.
Or $a \in [0,2\,;\,10]$ donc $a \neq 0$; il faut donc que $\ln(a)+1 = 0 \iff \ln(a) = -1 \iff a = \mathrm{e}^{-1}$
L'unique valeur a de $[0,2\,;\,10]$ pour laquelle la tangente à (C_f) au point d'abscisse a passe par l'origine est $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. L'équation réduite de la tangente est alors : $y = 2\dfrac{1}{\mathrm{e}}(-2+1)x$ soit $y = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}x$

Retour à la liste des corrigés

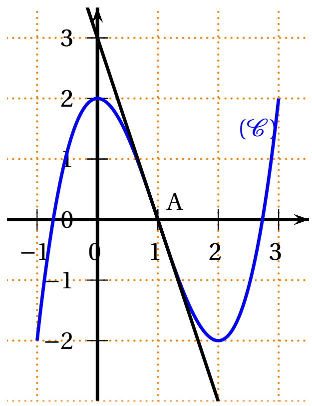
Corrigé du baccalauréat ES – Nouvelle-Calédonie
19 novembre 2015

Exercice 1 **Commun à tous les candidats** **4 points**

On donne ci-contre la représentation graphique $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.

On note f' la fonction dérivée de f et F une primitive de f.

La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point $A(1 ; 0)$ est tracée, elle passe par le point de coordonnées $(0 ; 3)$.



1. Calcul de $f'(1)$

a. $f'(1) = 3$ $\boxed{\textbf{b.}\ f'(1) = -3}$

c. $f'(1) = -\frac{1}{3}$ **d.** $f'(1) = 0$

Soit B le point de coordonnées $(3; 0)$; la tangente tracée est la droite (AB) donc $f'(1)$ est le coefficient directeur de (AB) : $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-0}{0-1} = -3$

2. La fonction f est :

$\boxed{\textbf{a.}\ \text{concave sur } [-1 ; 1]}$ **b.** convexe sur $[-1 ; 1]$

c. concave sur $[0 ; 2]$ **d.** convexe sur $[0 ; 2]$

Sur $[-1; 1]$ la courbe est entièrement en dessous de ses tangentes donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

3. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de I est :

a. $0 \leqslant I \leqslant 1$ $\boxed{\textbf{b.}\ 1 \leqslant I \leqslant 2}$

c. $2 \leqslant I \leqslant 3$ **d.** $3 \leqslant I \leqslant 4$

La fonction f est positive sur l'intervalle $[0; 1]$ donc l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe ; il suffit donc de compter les carreaux unité pour déterminer l'encadrement qui convient.

4. La fonction F est :

$\boxed{\textbf{a.}\ \text{croissante sur } [0 ; 1]}$ **b.** décroissante sur $[0 ; 1]$

c. croissante sur $[-1 ; 0]$ **d.** croissante sur $[-1 ; 1]$

La fonction F a pour dérivée la fonction f ; la fonction F est donc croissante sur $[0; 1]$ car f est positive sur cet intervalle.

EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014+n$, avec n un nombre entier naturel.
On a donc $u_0 = 150$.

1. Il y a 150 élèves en périscolaire en 2014. Il en reste 80 % ce qui fait $150 \times 0,8 = 120$. Il y a 40 nouveaux élèves, ce qui fait $120+40 = 160$.

Il y aura donc 160 élèves inscrits au périscolaire en 2015.

2. Il y a u_n élèves inscrits l'année $2014+n$. L'année suivante il en reste 80 %, ce qui fait $0,8u_n$. Il y a 40 nouveaux inscrits l'année $2014+(n+1)$ donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$, pour tout entier naturel n.

3. On donne l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à U la valeur 150
Traitement	Tant que $U \leqslant 190$
	n prend la valeur $n+1$
	U prend la valeur $0,8U+40$
	Fin tant que
Sortie	Afficher le nombre $2014+n$

a. On complète le tableau en s'arrêtant dès que $U > 190$:

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de U	150	160	168	124,40	179,52	183,62	186,89	189,51	191,61
Condition $U \leqslant 190$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

b. L'affichage en sortie d'algorithme est $2014+8$ soit 2022.

Cela correspond à la première année pour laquelle le nombre d'inscrits en périscolaire va dépasser 190.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$; donc $u_n = v_n + 200$.

a.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,8u_n + 40 - 200 = 0,8(v_n+200) - 160 = 0,8v_n + 160 - 160 = 0,8v_n$
- $v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = -50$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -50$.

b. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -50$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -50 \times 0,8^n$. Or $u_n = v_n + 200$.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$.

c. On résout l'inéquation $200 - 50 \times 0,8^n > 190$

$$\begin{array}{rcll} 200 - 50 \times 0,8^n > 190 & \iff & 10 > 50 \times 0,8^n & \\ & \iff & 0,2 > 0,8^n & \\ & \iff & \ln(0,2) > \ln(0,8^n) & \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\ & \iff & \ln(0,2) > n\ln(0,8) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} < n & \text{car } \ln(0,8) < 0 \end{array}$$

$\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \approx 7,2$ donc le plus petit entier naturel n tel que $200 - 50 \times 0,8^n > 190$ est $n = 8$.

d. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.

$n = 8$ correspond à l'année $2014+8 = 2022$; c'est donc à partir de 2022 que la directrice du périscolaire sera obligée de refuser des inscriptions.

EXERCICE 2 Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité 5 points

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à $0,4$;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à $0,2$;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à $0,85$.

On note :

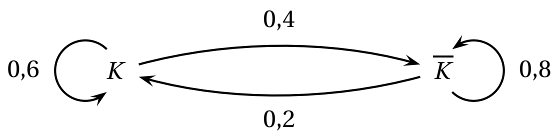
- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Partie A

1. On représente la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$:



2. D'après le texte : $\begin{cases} p_{n+1} &= 0,6p_n + 0,2q_n \\ q_{n+1} &= 0,4p_n + 0,8q_n \end{cases}$ ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$\begin{pmatrix} p_{n+1} & q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

La matrice de transition M associée à ce graphe est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

3. Le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85 donc $p_1 = 0,85$. la proportion de ceux qui choisissent la planche à rame est donc $q_1 = 1 - 0,85 = 0,15$.
Donc $P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}$

4. L'état probabiliste lors du 3$^{\text{e}}$ jour est P_3. À la calculatrice, on trouve :
$P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0,54 & 0,46 \end{pmatrix}$ et $P_3 = P_2 M = \begin{pmatrix} 0,416 & 0,584 \end{pmatrix}$

5. Chaque adolescent choisit un et un seul sport parmi les deux proposés, donc, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n + q_n = 1$.
$\left.\begin{array}{l} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2q_n \\ p_n + q_n = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2(1 - p_n) \iff p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout $n \geqslant 1$

6. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Choisir un nombre entier naturel $N \geqslant 2$
	p prend la valeur $0,85$
Traitement	Pour i allant de 2 à N
	p prend la valeur $0,4p + 0,2$
	Fin pour
Sortie	Afficher p

a. on complète le tableau suivant pour la valeur $N = 5$ saisie :

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de p	0,85	0,54	0,416	0,366	0,347

b. L'affichage en sortie d'algorithme pour $N = 5$ est approximativement de 0,347.

c. Cela signifie que le cinquième jour, il y a une proportion de 34,7 % d'adolescents qui pratiquent le canoë-kayak.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
On admet que $p_n = \dfrac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \dfrac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. On peut conjecturer que la suite (p_n) a pour limite $\dfrac{1}{3}$.
Remarque – Cela se démontre assez facilement en tenant compte du fait que la suite géométrique $(0,4^n)$ *a pour limite 0.*

2. La suite (p_n) a pour limite $\dfrac{1}{3}$ donc, comme $p_n + q_n = 1$, on peut dire que la suite (q_n) a pour limite $1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.
Plus le nombre de jours augmente, plus la proportion d'adolescents pratiquant le canoë-kayak se rapproche d'un tiers, et plus la proportion de ceux pratiquant la planche à rame se rapproche des deux-tiers.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 5 points

Pierre a des pommiers dans son verger. Il décide de faire du jus de pomme avec ses fruits.
Dans sa récolte :

- il dispose de 80 % de pommes de variété A et de 20 % de pommes de variété B.
- 15 % des pommes de variété A et 8 % des pommes de variété B sont avariées et devront être jetées.

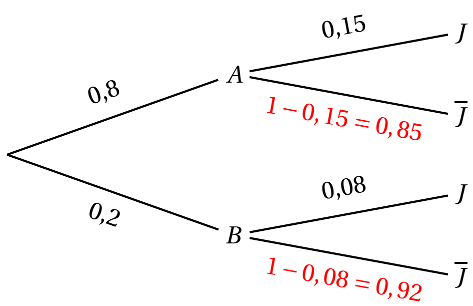
On prend une pomme au hasard dans la récolte et on note :

- A l'évènement « la pomme est de variété A » ;
- B l'évènement « la pomme est de variété B » ;
- J l'évènement « la pomme est jetée » ;
- $\overline{J}$ l'évènement contraire de l'évènement J.

On note $p(A)$ la probabilité de l'évènement A.

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. La pomme est de variété A et est jetée est l'événement $A \cap J$:
$p(A \cap J) = p(A) \times p_A(J) = 0,8 \times 0,15 = 0,12$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$p(J) = p(A \cap J) + p(B \cap J) = p(A) \times p_A(J) + p(B) \times p_B(J) = 0,12 + 0,2 \times 0,08 = 0,12 + 0,016 = 0,136$
4. La probabilité qu'une pomme soit de variété A sachant qu'elle a été jetée est $P_J(A)$:
$P_J(A) = \dfrac{p(A \cap J)}{p(J)} = \dfrac{0,12}{0,136} \approx 0,882$

Partie B

Une pomme pèse en moyenne 150 g. On modélise le poids d'une pomme en grammes par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart type $\sigma = 10$.

1. La probabilité que la pomme ait un poids inférieur à 150 g est $p(X \leqslant 150)$; comme $150 = \mu$, on peut dire que $p(X \leqslant 150) = 0,5$.
2. $p(120 \leqslant X \leqslant 170) = p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma \approx 0,976$ d'après le cours.
Cela veut dire que la probabilité qu'une pomme ait un poids compris entre 120 et 170 grammes est de 0,976.
Remarque – On peut naturellement utiliser la calculatrice.

Partie C

Pierre a pris rendez-vous dans une fabrique de jus de pomme artisanale. Il arrive au hasard entre 8 heures et 9 heures 30 minutes.
Son heure d'arrivée est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi uniforme sur [8 ; 9,5].
La probabilité que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45 est $p(8,5 \leqslant Y \leqslant 8,75)$.
D'après le cours : $p(8,5 \leqslant Y \leqslant 8,75) = \dfrac{8,75 - 8,5}{9,5 - 8} = \dfrac{0,25}{1,5} = \dfrac{1}{6}$
Il y a donc une chance sur 6 que Pierre arrive entre 8 h 30 et 8 h 45.

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $f(x) = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.

Partie A

1. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+4} + (2x - 5) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x+4} + 0 = (-2x + 7)\,\mathrm{e}^{-x+4}$
2. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x+4} > 9$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 7$ qui s'annule et change de signe pour $x = 3,5$.
On calcule :
$f(0) = -5\,\mathrm{e}^4 + 20 \approx -252,991$; $f(3,5) = 2\,\mathrm{e}^{0,5} + 20 \approx 23,297$ et $f(10) = 15\,\mathrm{e}^{-6} + 20 \approx 20,037$
D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		3,5		10
$-2x+7$		+	0	−	
e^{-x+4}		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-252,991$	↗	$23,297$	↘	$20,037$

3. On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	0		α		$3,5$		10
					$23,297$		
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	
	$-252,991$						$20,037$

On peut en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0;10]$ et que cette solution est dans $[0;3,5]$.

$\left.\begin{array}{lcl} f(1) & \approx & -40,3 < 0 \\ f(2) & \approx & 12,6 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1;2]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{lcl} f(1,5) & \approx & -4,4 < 0 \\ f(1,6) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,5;1,6]$

$\left.\begin{array}{lcl} f(1,59) & \approx & -0,26 < 0 \\ f(1,60) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,59;1,60]$

4. On admet que la fonction F définie sur $[0;10]$ par $F(x) = (-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x+4} + 20x$ est une primitive de f sur $[0;10]$.

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;10]$ est $\dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{10}\Big(F(10) - F(0)\Big)$

$F(10) = -17\,\mathrm{e}^{-6} + 200$ et $F(0) = 3\,\mathrm{e}^{4}$ donc $F(10) - F(0) = 200 - 17\,\mathrm{e}^{-6} - 3\,\mathrm{e}^{4}$

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;10]$ est donc $\dfrac{200 - 17\,\mathrm{e}^{-6} - 3\,\mathrm{e}^{4}}{10} \approx 3,616$.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0;10]$ par : $f(x) = (2x-5)\,\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.

1. Le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum correspond à $x = 3,5$ centaines d'objets donc 350 objets.
   $f(3,5) \approx 23,297$ donc le bénéfice maximal réalisé est de 23 297 €.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand il vend au moins x centaines d'objets avec $f(x) > 0$.
   D'après le tableau de variation de la fonction f, il faut pour cela que $x > \alpha$.
   Or $\alpha \in [1,59;1,60]$ donc il faut vendre au moins 160 objets pour réaliser un bénéfice.
3. La valeur moyenne de la fonction f sur $[0;10]$ correspond au bénéfice moyen hebdomadaire ; en moyenne, le bénéfice sera de $3,616 \times 1\,000 = 3\,616$ €.

Retour à la liste des corrigés

∽ Corrigé du baccalauréat ES/L – Amérique du Sud ∾
25 novembre 2015

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

Une étude est menée par une association de lutte contre la violence routière. Des observateurs, sur un boulevard d'une grande ville, se sont intéressés au comportement des conducteurs d'automobile au moment de franchir un feu tricolore.

Partie A

Sur un cycle de deux minutes (120 secondes), le feu est à la couleur « rouge » pendant 42 secondes, « orange » pendant 6 secondes et « vert » pendant 72 secondes.
Par ailleurs, les observateurs notent que les comportements diffèrent selon la couleur du feu :

- lorsque le feu est rouge, 10 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est orange, 86 % des conducteurs continuent de rouler et les autres s'arrêtent ;
- lorsque le feu est vert, tous les conducteurs continuent de rouler.

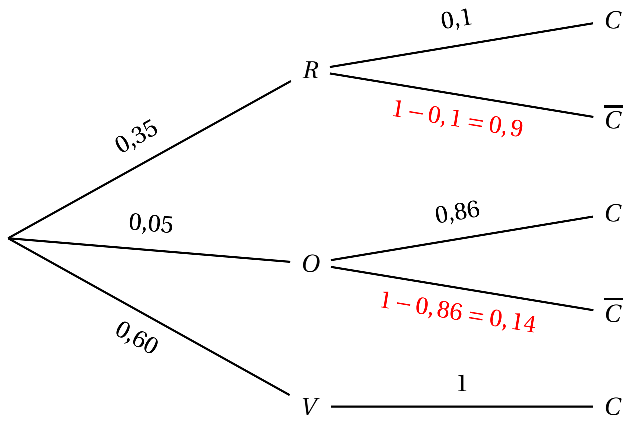
On s'intéresse à un conducteur pris au hasard, et on observe son comportement selon la couleur du feu.
On note :

- R l'évènement « le feu est au rouge » ;
- O l'évènement « le feu est à l'orange » ;
- V l'évènement « le feu est au vert » ;
- C l'évènement « le conducteur continue de rouler ».

D'après ce qui est dit dans le texte : $p(R) = \dfrac{42}{120} = 0,35$, $p(O) = \dfrac{6}{120} = 0,05$ et $p(V) = \dfrac{72}{120} = 0,6$

De plus : $P_R(C) = 0,1$, $p_O(C) = 0,86$ et $p_V(C) = 1$

1. On modélise cette situation par un arbre pondéré :



2. La probabilité que le conducteur continue de rouler est $p(C)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$p(C) = p(R \cap C) + p(O \cap C) + p(V \cap C) = p(R) \times p_R(C) + p(O) \times p_O(C) + p(V) \times p_V(C)$
$= 0,35 \times 0,1 + 0,05 \times 0,86 + 0,6 \times 1 = 0,678$

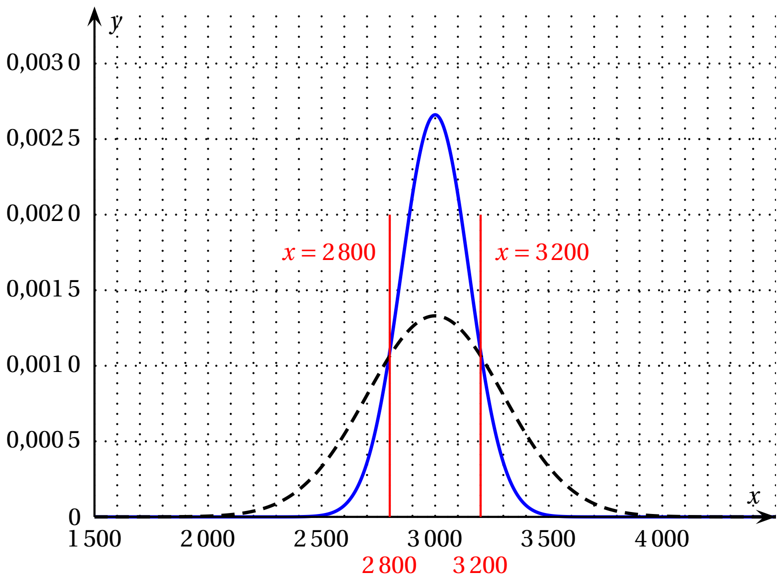
3. Sachant qu'un conducteur continue de rouler au feu, la probabilité que le feu soit vert est $p_C(V)$:
$p_C(V) = \dfrac{p(V \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,6 \times 1}{0,678} \approx 0,885$

Partie B

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de voitures par heure à proximité du feu évoqué dans la partie A. On admet que X suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type 150.

1. À l'aide de la calculatrice, on détermine la probabilité de compter entre 2 800 et 3 200 voitures par heure à cet endroit, c'est-à-dire $p(2800 \leqslant X \leqslant 3200)$; on trouve approximativement 0,818.
2. À l'aide de la calculatrice, on détermine la probabilité de compter plus de 3 100 voitures par heure à cet endroit, c'est-à-dire $p(X \geqslant 3100)$; on trouve approximativement 0,252.
3. À un autre endroit du boulevard, à proximité d'un pont, la variable aléatoire Y qui compte le nombre de voitures par heure suit la loi normale de moyenne 3 000 et d'écart type σ strictement supérieur à 150.

   Sur le graphique ci-dessous, la courbe correspondant à X est en traits pleins et la courbe correspondant à Y est en pointillés.



   On trace les droites d'équations $x = 2800$ et $x = 3200$; elles semblent couper les deux courbes en leurs points d'intersection.

   D'après le cours :

   - $p(2800 \leqslant X \leqslant 3200$ est l'aire $\mathscr{A}_1$ de l'ensemble des points compris entre la courbe en traits pleins, l'axe des abscisses et les deux droites verticales tracées ;
   - $p(2800 \leqslant Y \leqslant 3200$ est l'aire $\mathscr{A}_2$ de l'ensemble des points compris entre la courbe en pointillés, l'axe des abscisses et les deux droites verticales tracées.

   Graphiquement, $\mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$, donc la probabilité qu'il passe en une heure, entre 2 800 et 3 200 voitures, est plus grande pour le lieu correspondant à l'aire $\mathscr{A}_1$, donc à proximité du feu.

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 6 points

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;7]$ par : $f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48$
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;7]$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;7]$:

- **a.** $f'(x) = 1,5 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 24 = 4,5x^2 - 18x + 24$
- **b.** $f''(x) = 4,5 \times 2x - 18 = 9x - 18$

2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée première f' est croissante, c'est-à-dire sur lesquels sa dérivée seconde f'' est positive.
$f''(x) \geqslant 0 \iff 9x - 18 \geqslant 0 \iff 9x \geqslant 18 \iff x \geqslant 2$
La fonction f est convexe sur l'intervalle $[2\,;\,7]$.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine. On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note c la fonction définie sur $[1\,;7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1\,;7]$: $c(x) = \dfrac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \dfrac{48}{x}$
On admet que la fonction c est dérivable sur $[1\,;7]$. On note c' sa fonction dérivée.

1. $c'(x) = 1,5 \times 2x - 9 + 0 + 48 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3x - 9 - \dfrac{48}{x^2} = \dfrac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$

$$\frac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2} = \frac{3(x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16)}{x^2} = \frac{3(x^3 - 3x^2 - 16)}{x^2} = \frac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$$

Donc, pour tout x de $[1\,;7]$, $c'(x) = \dfrac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}$

2. **a.** On cherche le signe de $c'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;7]$.

- signe de $x-4$: $x - 4 > 0$ pour $x > 4$ donc sur $]4\,;7]$
- signe de $x^2 + x + 4$: $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ donc $x^2 + x + 4 > 0$ pour tout x

$c(1) = 64,5$, $c(4) = 24$ et $c(7) \approx 41,4$
D'où le tableau de variation de la fonction c sur $[1\,;7]$:

x	1		4		7
$x-4$		$-$	0	$+$	
x^2+x+4		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
$c(x)$	64,5	↘	24	↗	41,4

b. Le minimum de la fonction c est atteint pour $x = 4$ donc pour 4000 articles à fabriquer ; le coût moyen par article est alors de 24×1000 soit 24000 euros.

3. On considère la fonction Γ définie sur l'intervalle $[1\,;7]$ par : $\Gamma(x) = 0,5x^3 - 4,5x^2 + 24x + 1 + 48\ln x$

a. La fonction Γ est dérivable sur $[1\,;\,7]$ et
$\Gamma'(x) = 0,5 \times 3x^2 - 4,5 \times 2x + 24 + 0 + 48 \times \dfrac{1}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \dfrac{48}{x} = c(x)$
Donc la fonction Γ est une primitive de la fonction c sur $[1\,;\,7]$.

b. La valeur moyenne de la fonction c sur $[1\,;\,7]$ est $M = \dfrac{1}{7-1}\displaystyle\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x$
Or Γ est une primitive de c sur $[1\,;\,7]$ donc

$$\begin{aligned}\int_1^7 c(x)\,\mathrm{d}x &= \Gamma(7) - \Gamma(1) = (0,5\times 343 - 4,5\times 49 + 24\times 7 + 1 + 48\times \ln 7) - (0,5 - 4,5 + 24 + 1 + 0)\\ &= (120 + 48\ln 7) - 21 = 99 + 48\ln 7\end{aligned}$$

La valeur moyenne est donc $M = \dfrac{99 + 48\ln 7}{6} \approx 32,07$.

EXERCICE 3 — Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité, et candidats de L — 5 points

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ». Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note a_n la probabilité que Claudine demande un avis la n-ième semaine. On a ainsi $a_1 = 0,1$.
On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.

1. $a_2 = 0,5a_1 + 0,4 = 0,5\times 0,1 + 0,4 = 0,45$
La probabilité que Claudine demande un avis la deuxième semaine est égale à 0,45.

2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite (v_n) par : $v_n = a_n - 0,8$.

a. Pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = a_n - 0,8$ donc $a_n = v_n + 0,8$.

- $v_{n+1} = a_{n+1} - 0,8 = 0,5a_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = a_1 - 0,8 = 0,1 - 0,8 = -0,7$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = -0,7$.

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = -0,7$ donc, d'après le cours, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -0,7 \times 0,5^{n-1}$.
Comme $u_n = v_n + 0,8$, on en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 0,8 - 0,7\times 0,5^{n-1}$.

c. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$; or $0 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

d. $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0\\ a_n = v_n + 0,8\end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,8$
Cela signifie que, quand le nombre de semaines deviendra très grand, Claudine va demander un avis 8 fois sur 10.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel N est un entier naturel L est un réel strictement compris entre $0,1$ et $0,8$
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant L$
	    N prend la valeur $N+1$
	    A prend la valeur $0,5\times A + 0,4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

a. Pour la valeur $L = 0,7$, on complète les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2	3	4
Valeur de A	0,1	0,45	0,625	0,712 5
Condition $A \leqslant L$	vraie	vraie	vraie	fausse

b. L'affichage de N obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de L est $0,7$ est donc 4.

c. Le nombre N obtenu par l'algorithme quand le nombre L est compris entre 0,1 et 0,8 est le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à L.

4. On cherche n tel que $a_n > 0,799$:

$$\begin{array}{rcrcll}
a_n > 0,799 & \iff & 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} & > & 0,799 & \\
 & \iff & 0,001 & > & 0,7 \times 0,5^{n-1} & \\
 & \iff & \dfrac{0,001}{0,7} & > & 0,5^{n-1} & \\
 & \iff & \ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right) & > & \ln\left(0,5^{n-1}\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\
 & \iff & \ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right) & > & (n-1)\ln 0,5 & \text{propriété de la fonction ln} \\
 & \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} & < & n-1 & \text{car } \ln 0,5 < 0 \\
 & \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 & < & n &
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \approx 10,5$ donc le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à 0,799 est 11.

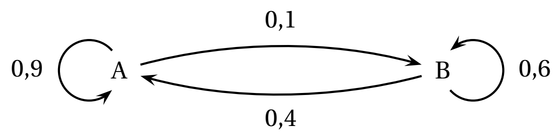
EXERCICE 3 Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et demande ou non l'avis de la bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Lorsque Claudine demande à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle le demande de nouveau la semaine suivante est $0,9$.
Lorsque Claudine ne demande pas à la bibliothécaire son avis, la probabilité qu'elle ne le demande pas non plus la semaine suivante est $0,6$.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut $0,1$.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

- a_n la probabilité que Claudine demande un avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- b_n, la probabilité que Claudine ne demande pas d'avis à la bibliothécaire la n-ième semaine ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste la n-ième semaine.

On a ainsi $a_1 = 0,1$ et $b_1 = 0,9$ et donc $P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1. a. On illustrer la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



b. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{l c l} a_{n+1} & = & 0,9a_n + 0,4b_n \\ b_{n+1} & = & 0,1a_n + 0,6b_n \end{array}\right.$

ce qui donne sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition de ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

2. $P_2 = P_1 M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \times 0,9 + 0,9 \times 0,4 & 0,1 \times 0,1 + 0,9 \times 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$

3. **a.** L'état stable est l'état $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ PM = P \end{array}\right.$

$PM = P \iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0,9a + 0,4b & 0,1a + 0,6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

$\iff \left\{\begin{array}{l c l} 0,9a + 0,4b & = & a \\ 0,1a + 0,6b & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -0,1a + 0,4b & = & 0 \\ 0,1a - 0,4b & = & 0 \end{array}\right. \iff a - 4b = 0$

Donc $\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ PM = P \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a+b & = & 1 \\ a-4b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a+b & = & 1 \\ 5b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} a & = & 0,8 \\ b & = & 0,2 \end{array}\right.$

L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

b. Si la répartition est de 80 % - 20 % pour les états A et B la semaine n, cette répartition restera la même la semaine $n+1$ et toutes les suivantes.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.
On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel et N est un entier naturel
INITIALISATION :	A prend la valeur $0,1$ N prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant 0,79$ N prend la valeur $N+1$ A prend la valeur $0,5 \times A + 0,4$ Fin du Tant que
SORTIE :	Afficher N

Dans cet algorithme, la variable A désigne le terme a_n dont le rang est donné par N.
Cet algorithme permet d'obtenir, si elle existe, la première valeur de n pour laquelle a_n est strictement supérieur à 0,79.

5. On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1}$.
On cherche n tel que $a_n > 0,799$:

$$\begin{array}{r c r c l l}
a_n > 0,799 & \iff & 0,8 - 0,7 \times 0,5^{n-1} & > & 0,799 & \\
 & \iff & 0,001 & > & 0,7 \times 0,5^{n-1} & \\
 & \iff & \dfrac{0,001}{0,7} & > & 0,5^{n-1} & \\
 & \iff & \ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right) & > & \ln\left(0,5^{n-1}\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\
 & \iff & \ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right) & > & (n-1)\ln 0,5 & \text{propriété de la fonction ln} \\
 & \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} & < & n-1 & \text{car } \ln 0,5 < 0 \\
 & \iff & \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 & < & n &
\end{array}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\dfrac{0,001}{0,7}\right)}{\ln 0,5} + 1 \approx 10,5$ donc le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis est supérieur à 0,799 est 11.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 4 points

Pour la fête du village de Boisjoli, le maire a invité les enfants des villages voisins.
Les services de la mairie ayant géré les inscriptions dénombrent 400 enfants à cette fête; ils indiquent aussi que 32 % des enfants présents sont des enfants qui habitent le village de Boisjoli.

1. Le nombre d'enfants issus des villages voisins est :

   a. 128 $\boxed{\textbf{b. } 272}$ **c.** 303 **d.** 368

   Il y a 32 % d'enfants de Boisjoli, donc 68 % d'enfants des villages voisins; $\dfrac{68}{100} \times 400 = 272$

Lors de cette fête, huit enfants sont choisis au hasard afin de former une équipe qui participera à un défi sportif. On admet que le nombre d'enfants est suffisamment grand pour que cette situation puisse être assimilée à un tirage au hasard avec remise.
On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'enfants de l'équipe habitant le village de Boisjoli.

2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres :

   a. $n = 400$ et $p = 0,32$ $\boxed{\textbf{b. } n = 8 \text{ et } p = 0,32}$
   c. $n = 400$ et $p = 8$ **d.** $n = 8$ et $p = 0,68$

   La probabilité qu'un enfant soit de Boisjoli est de 0,32 puisqu'il y a 32 % d'enfants de ce village. On choisit 8 enfants donc $n = 8$.

3. La probabilité que dans l'équipe il y ait au moins un enfant habitant le village de Boisjoli est :

   a. 0,125 **b.** 0,875 $\boxed{\textbf{c. } 0{,}954}$ **d.** 1

   On cherche $P(X \geqslant 1)$ c'est-à-dire $1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,32)^8 \approx 0,954$.

4. L'espérance mathématique de X est :

   a. 1,740 8 $\boxed{\textbf{b. } 2{,}56}$ **c.** 87,04 **d.** 128

   L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $E(X) = np = 8 \times 0,32 = 2,56$.

Retour à la liste des corrigés

Corrigé du baccalauréat ES/L – Nouvelle Calédonie mars 2016

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats** **5 points**

Question 1

La proportion de gauchers dans la population française est de 13 %.
Un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95 %, de la fréquence de gauchers dans un échantillon de 500 personnes prises au hasard dans la population française est :

a. [0,080 ; 0,180] **b.** [0,085 ; 0,175] $\boxed{\textbf{c. } [0{,}100\,;\,0{,}160]}$ **d.** [0,128 ; 0,132]

$n = 500$ et $p = 0,13$ donc $n \geqslant 30$, $np = 65 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 435 \geqslant 5$ donc les conditions pour déterminer un intervalle I de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des gauchers dans un échantillon de taille 500 sont vérifiées :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,13 - 1,96\frac{\sqrt{0,13(1-0,13)}}{\sqrt{500}}\,;\, 0,13 + 1,96\frac{\sqrt{0,13(1-0,13)}}{\sqrt{500}}\right]$$

$$\approx [0,100\,;\,0,160]$$

Question 2

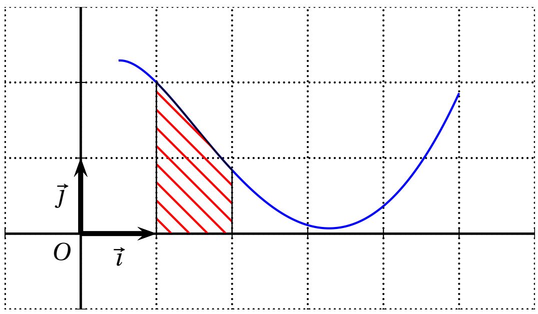
Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$ est :

a. $[2\,;\,+\infty[$ **b.** $]0\,;\,2]$ **c.** $]-\infty\,;\,1]$ $\boxed{\textbf{d. }]0\,;\,1]}$

L'inéquation $\ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1)$ n'aura de solutions que si $\ln x$ et $\ln(2x+1)$ existent, donc si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcll} \ln x + \ln 3 \leqslant \ln(2x+1) & \iff & \ln(3x) \leqslant \ln(2x+1) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & 3x \leqslant 2x+1 & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \iff & x \leqslant 1 & \end{array}$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par : $f(x) = x^2 - 3x\ln x + 1$
On a représenté, ci-dessous, cette fonction f dans un repère orthonormé :



Question 3

a. La fonction f est décroissante sur l'intervalle [0,5 ; 3].

b. La fonction f est convexe sur l'intervalle [0,5 ; 5].

c. La courbe représentant f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.

$\boxed{\textbf{d. }\text{La fonction } f \text{ est concave sur l'intervalle } [0{,}5\,;\,1{,}5].}$

$f(x) = x^2 - 3x\ln x + 1$ donc $f'(x) = 2x - 3\ln x - 3x\dfrac{1}{x} = 2x - 3\ln x - 3$ et donc $f''(x) = 2 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{2x-3}{x}$
$f''(x) \leqslant 0$ sur $[0,5\,;\,1,5]$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle.

Question 4

On note I l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$; on peut affirmer que :

a. $0,5 \leqslant I \leqslant 1$ **b.** $4 \leqslant I \leqslant 7$ $\boxed{\textbf{c. } 1 \leqslant I \leqslant 1,75}$ **d.** $2 \leqslant I \leqslant 4$

L'intégrale I est égale à l'aire de la partie hachurée sur le graphique.

Question 5

On souhaite utiliser un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée au centième de la solution α de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[1\,;\,3]$. (On admet que sur cet intervalle l'équation admet bien une unique solution.)
Voici trois algorithmes :

Algorithme 1	**Algorithme 2**
Initialisation	**Initialisation**
a prend la valeur 1	a prend la valeur 1
b prend la valeur 3	b prend la valeur 3
s prend la valeur 0	
Traitement	**Traitement**
$n = (b-a) * 100$	Tant que $b - a > 0,01$ faire
Pour i allant de 1 à n faire	• c prend la valeur $(a+b)/2$
• x prend la valeur $a + 0,01 * i$	• si $f(c) > 1$ alors a prend la valeur c
• s prend la valeur $s + 0,01 * f(x)$	• sinon b prend la valeur c
Fin de Pour	Fin de Tant que
Sortie	**Sortie**
Afficher s	Afficher a

Algorithme 3
Initialisation
a prend la valeur 1
b prend la valeur 3
Traitement
Pour x allant de 1 à 3 faire
• Si $f(x) < 1$ alors a prend la valeur $(a+b)/2$
• sinon b prend la valeur $(a+b)/2$
Fin de Pour
Sortie
Afficher a

a. L'algorithme 1 affiche une valeur approchée au centième de α.

$\boxed{\textbf{b. } \text{L'algorithme 2 affiche une valeur approchée au centième de } \alpha.}$

c. L'algorithme 3 affiche une valeur approchée au centième de α.

d. Aucun des trois algorithmes n'affiche de valeur approchée au centième de α.

L'algorithme 2 correspond à la recherche d'une solution d'équation par dichotomie.

EXERCICE 2 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Un club de basketball a suivi sur plusieurs années l'évolution des abonnements annuels de ses supporters. Partant de ces observations, on décide de modéliser le nombre annuel d'abonnés sur la base d'un taux de réabonnement de 80 % d'une année sur l'autre auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnements.
On se propose d'étudier l'évolution du nombre annuel des abonnés du club de basketball à l'aide de ce modèle.
Le nombre d'abonnés au club à la fin de l'année 2014 était 1 128.
On note a_n, le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2014+n$. On a donc $a_0 = 1128$.

1. De 2014 à 2015, le taux de réabonnement est de 80 % ; $1128 \times \dfrac{80}{100} = 902,4$.
Chaque année s'ajoutent 300 nouveaux abonnés donc $902,4+300 = 1202,4$.
Le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2015 est estimé à 1 202.

2. Prendre 80 % du nombre d'abonnés l'année n, c'est multiplier par 0,8 ; comme il faut aussi ajouter 300 nouveaux abonnés, on aura $a_{n+1} = 0,8a_n + 300$, pour tout n.

3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 1500 - a_n$; donc $a_n = 1500 - u_n$.

a. $u_{n+1} = 1500 - a_{n+1} = 1500 - (0,8a_n + 300) = 1500 - 0,8a_n - 300 = 1200 - 0,8(1500 - u_n)$
$= 1200 - 1200 + 0,8u_n = 0,8u_n$
$u_0 = 1500 - a_0 = 1500 - 1128 = 372$
Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 372$ et de raison $q = 0,8$.

b. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 372$ et de raison $q = 0,8$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 372 \times 0,8^n$.

c. On sait que $u_n = 372 \times 0,8^n$ et que $a_n = 1500 - u_n$ donc, pour tout n, $a_n = 1500 - 372 \times 0,8^n$.

4. On résout l'inéquation $a_n > 1450$:

$$\begin{aligned}
a_n > 1450 &\iff 1500 - 372 \times 0,8^n > 1450\\
&\iff 1500 - 1450 > 372 \times 0,8^n\\
&\iff 50 > 372 \times 0,8^n\\
&\iff \frac{50}{372} > 0,8^n\\
&\iff \ln\frac{50}{372} > \ln(0,8^n) && \text{croissance de la fonction ln}\\
&\iff \ln\frac{50}{372} > n \times \ln 0,8 && \text{propriété de la fonction ln}\\
&\iff \frac{\ln\frac{50}{372}}{\ln 0,8} < n && \text{car } \ln 0,8 < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\frac{50}{372}}{\ln 0,8} \approx 8,99$ donc $n \geqslant 9$.
Donc pour $n \geqslant 9$, c'est à dire à partir de l'année $2014+9 = 2023$, on estime qu'il y aura plus de 1 450 abonnés dans le club.

5. La municipalité dont dépend le club de basketball prévoit de construire une nouvelle salle de sport pour accueillir les rencontres du club. On souhaite pouvoir accueillir tous les abonnés du club auxquels s'ajouteraient 500 spectateurs occasionnels non abonnés au club.
On sait que $u_n = 372 \times 0,8^n$, donc $u_n > 0$; or $a_n = 1500 - u_n$ donc $a_n < 1500$ pour tout n.
La suite (u_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente vers 0. Comme $a_n = 1500 - u_n$, on peut déduire que la suite (a_n) a pour limite 1 500.
Le nombre d'abonnés va tendre vers 1 500 en restant inférieur à 1 500. Comme il faut 500 places supplémentaires pour des spectateurs, la municipalité devra construire une salle de 2 000 places pour accueillir tout le monde.

EXERCICE 2 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Deux supermarchés concurrents, Alphamarché et Bétamarché ouvrent simultanément un service de retrait permettant à leurs clients de récupérer leurs courses après avoir passé leur commande sur internet.
Afin de promouvoir leur service de retrait, chacun organise une campagne de publicité.
Alphamarché contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages mensuels où les clients qui utilisent les services de retrait se prononcent tous en faveur d'un seul service de retrait, celui d'Alphamarché ou celui de Bétamarché.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché.
Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition.
On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'avis d'un mois sur l'autre.
Le mois du début de la campagne est noté mois 0.
On interroge, au hasard, un client faisant ses courses dans l'un des deux services de retrait.
Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois n ;
- b_n la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois n ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois n.

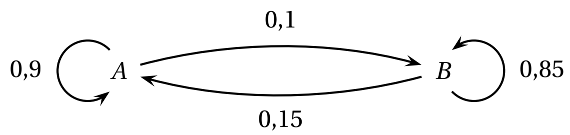
1. Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché donc $a_0 = 0,2$ et $b_0 = 1 - a_0 = 1 - 0,2 = 0,8$; on a donc : $P_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

2. On note A, l'état « Le client interrogé préfère Alphamarché » et B l'état « Le client interrogé préfère Bétamarché ».

10 % des clients qui préfèrent Alphamarché changent de supermarché le mois suivant, donc il reste 90 % de clients fidèles à Alphamarché d'un mois au suivant.

15 % des clients qui préfèrent Bétamarché changent de supermarché le mois suivant, donc il reste 85 % de clients fidèles à Bétamarché d'un mois au suivant.

On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



3. a. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0,9\,a_n + 0,15\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,1\,a_n + 0,85\,b_n \end{array}\right.$

Ce qui se traduit sous forme matricielle par : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

b. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,15 & 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,85 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0,18 + 0,12 & 0,02 + 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$

4. a. D'après le cours, on peut dire que, pour tout n, $P_n = P_0 \times M^n$.

Cette propriété est démontrée souvent dans l'année de terminale et peut être considérée comme devant être connue des élèves ; si on veut la redémontrer dans cette question, on utilisera une démonstration par récurrence.

b. On trouve à la calculatrice : $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 0,43125 & 0,56875 \end{pmatrix}$

Cela veut dire que le 3e mois, il y aura à peu près 43 % de clients qui choisiront Alphamarché, et 57 % qui choisiront Bétamarché.

5. D'après la calculatrice, la suite (a_n) semble croissante, et la suite (b_n) décroissante.
Toujours en utilisant la calculatrice, on trouve :

$P_4 = P_0 \times M^4 \approx \begin{pmatrix}0,4734 & 0,5266\end{pmatrix}$ et $P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix}0,5051 & 0,4949\end{pmatrix}$

Donc, à partir du 5ᵉ mois, les clients préfèreront le retrait d'Alphamarché à celui de Bétamarché.

EXERCICE 3 — Commun à tous les candidats — 5 points

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique. Les voyageurs partent soit pour un séjour court, soit pour un séjour long.

Parmi les passagers voyageant en classe économique, 35 % partent pour un séjour long alors que parmi les passagers ayant choisi la classe confort, 70 % ont opté pour un séjour long.

Partie A

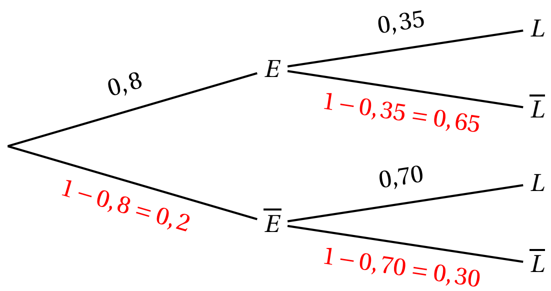
On choisit au hasard un passager du vol.

On note les évènements suivants :

- E : « Le passager voyage en classe économique. »
- L : « Le passager part pour un séjour long. »

On note $\overline{E}$ et $\overline{L}$ les évènements contraires des évènements E et L.

1. Sur 275 passagers, il y en a 220 qui voyagent en classe économique. Comme on choisit au hasard un passager du vol, il y a équiprobabilité, donc $p(E) = \dfrac{220}{275} = 0,8$.
2. D'après le texte, $p_E(L) = 0,35$ et $p_{\overline{E}}(L) = 0,70$.
   On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



3. La probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long est :
   $p(E \cap L) = p(E) \times p_E(L) = 0,8 \times 0,35 = 0,28$
4. D'après la formule des probabilités totales :
   $p(L) = p(E \cap L) + p(\overline{E} \cap L) = 0,28 + 0,2 \times 0,7 = 0,28 + 0,14 = 0,42$
5. On choisit au hasard un passager partant pour un long séjour.
   La probabilité que ce passager voyage en classe économique est :
   $p_L(E) = \dfrac{p(E \cap L)}{p(L)} = \dfrac{0,28}{0,42} = \dfrac{2}{3}$

Partie B

Lors de l'embarquement, chaque passager enregistre un bagage qui sera placé dans la soute de l'avion pendant le vol. Le poids de ce bagage ne doit pas excéder 20 kg. Dans le cas où le poids de son bagage dépasserait 20 kg, le passager doit s'acquitter d'une « taxe d'excédent de bagage ». Le montant à payer en cas d'excédent est précisé dans le tableau ci-dessous.

Poids p (en kg) du bagage	Taxe d'excédent de bagage
$20 < p \leqslant 21$	12 €
$21 < p \leqslant 22$	24 €
$22 < p \leqslant 24$	50 €
$p > 24$	20 €/kg au-delà des 20 kg autorisés

On choisit au hasard un bagage devant être transporté dans la soute de l'avion.
On admet que le poids de ce bagage, exprimé en kg, est modélisé par une variable aléatoire M qui suit la loi normale d'espérance 18,4 et d'écart type 1,2.

1. La probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage est $p(M > 20) \approx 0,091$.
2. La probabilité que le passager propriétaire du bagage choisi s'acquitte d'une taxe d'excédent de bagage de 24 € est $p(21 < M \leqslant 22) \approx 0,014$.

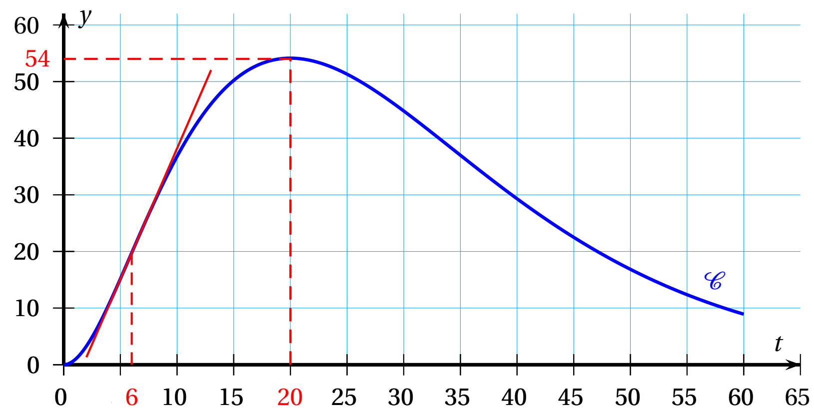
Partie C

L'enregistrement des bagages des passagers est possible pendant une durée de 2 h.
Un passager du vol est choisi au hasard et on note T la durée (en minutes] qui s'est écoulée entre le début des enregistrements des bagages et l'arrivée de ce passager au comptoir d'enregistrement.
On admet que T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 120].
La probabilité que le passager choisi enregistre ses bagages dans les 30 dernières minutes autorisées est $\dfrac{30}{120} = 0,25$.

EXERCICE 4 — Commun à tous les candidats — 5 points

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente le nombre de personnes malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie en fonction du nombre t de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.

Partie A



1. À l'aide du graphique, on peut estimer que le nombre de malades est maximal au bout de 20 jours ; le nombre approximatif de malades est de 54 milliers (voir graphique).
2. Le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus forte correspond au jour où la tangente à la courbe a un coefficient directeur maximum ; c'est autour du 6e jour.

Partie B

On modélise le nombre de malades (en milliers) en fonction du temps, à l'aide de la fonction f définie sur l'intervalle [0; 60] par : $f(t) = t^2\mathrm{e}^{-0,1t}$
où t représente le nombre de jours écoulés depuis l'apparition de la maladie.
Pour étudier les propriétés de la fonction f, on a utilisé un logiciel de calcul formel qui a fourni les résultats suivants :

- $f'(t) = 0,1t(20-t)\mathrm{e}^{-0,1t}$
- $f''(t) = \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\mathrm{e}^{-0,1t}$

- $F(t) = \left(-10t^2 - 200t - 2000\right)\text{e}^{-0,1t}$

où f' désigne la dérivée de f, f'' désigne sa dérivée seconde et F une primitive de f.

1. $f(t) = t^2\,\text{e}^{-0,1t}$ donc $f'(t) = 2t\,\text{e}^{-0,1t} + t^2 \times (-0,1)\,\text{e}^{-0,1t} = 0,1\,t\,(20-t)\,\text{e}^{-0,1t}$

2. **a.** Pour tout réel t, $\text{e}^{-0,1t} > 0$ et $T \geqslant 0$ sur $[0\,;\,60]$; donc $f'(t)$ est du signe de $20 - t$.
Donc $f'(t) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,20]$ et $f'(t) \leqslant 0$ sur $[20\,;\,60]$.
De plus, $f'(0) = 0$.

b. $f(0) = 0$, $f(20) = 400\,\text{e}^{-2} \approx 54,13$ et $f(60) = 3600\,\text{e}^{-6} \approx 8,92$
Le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,60]$ est :

x	0		20		60
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$400\,\text{e}^{-2}$	↘	$3600\,\text{e}^{-6}$

3. Le nombre moyen de malades par jour, en milliers, durant les 60 premiers jours après l'apparition de la maladie est donné par $N = \dfrac{1}{60}\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\text{d}t$.

a. La fonction F est une primitive de la fonction f donc : $\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\text{d}t = F(60) - F(0)$

$F(60) = -50000\,\text{e}^{-6}$ et $F(0) = -2000$ donc $\displaystyle\int_0^{60} f(t)\,\text{d}t = -50000\,\text{e}^{-6} + 2000$

Donc $N = \dfrac{1}{60}\left(-50000\,\text{e}^{-6} + 2000\right) = \dfrac{1}{3}\left(100 - 2500\,\text{e}^{-6}\right)$

b. $N \approx 31,268$; cela correspond au nombre moyen de malades en milliers, donc le nombre moyen de malades par jour, arrondi à la dizaine, est de 31 270.

4. **a.** La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse t_0 si la dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en t_0.

$f''(t) = 0 \iff \left(0,01t^2 - 0,4t + 2\right)\text{e}^{-0,1t} = 0 \iff 0,01t^2 - 0,4t + 2 = 0$
$\iff t^2 - 40t + 200 = 0$ (en multipliant par 100)

$\Delta = 40^2 - 4 \times 1 \times 200 = 800 > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$t' = \dfrac{40 + \sqrt{800}}{2} = \dfrac{40 + 20\sqrt{2}}{2} = 20 + 10\sqrt{2} \approx 34,14 > 15$ et $t'' = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5,85 < 15$

On étudie le signe de $f''(t)$ sur $[0\,;\,60]$:

t	0		$20-10\sqrt{2}$		15		$20+10\sqrt{2}$		60
$f''(t)$		+	0		−		0	+	

Sur l'intervalle $[0\,;\,15]$, la courbe $\mathscr{C}$ admet donc un seul point d'inflexion d'abscisse $20 - 10\sqrt{2}$ dont la valeur arrondie à l'unité est 6.

b. Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité de la courbe.
Pour $0 \leqslant t < 20 - 10\sqrt{2}$, $f''(t) > 0$, donc la fonction f est convexe sur $[0\,;\,20 - 10\sqrt{2}]$.
Pour $20 - 10\sqrt{2} < t \leqslant 15$, $f''(t) < 0$, donc la fonction f est concave sur $[20 - 10\sqrt{2}\,;\,15]$.
Cette abscisse du point d'inflexion correspond donc au moment où la fonction passe de convexe à concave, ce qui signifie que la propagation de la maladie commence à décroitre.

Retour à la liste des corrigés