∽ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie ∾
7 mars 2014 – Corrigé

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On regroupe les données du texte dans un tableau :

	F	G	Total
R	8	12	20
A	9	11	20
Total	17	23	40

Comme on choisit un élève au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a 23 garçons pour 40 élèves donc : $P(G) = \dfrac{23}{40} = 0{,}575$.

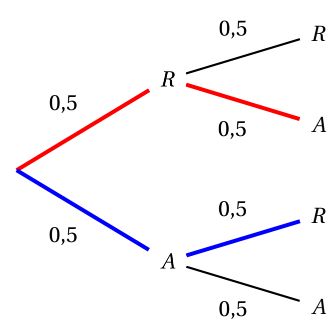
   Il y a 12 garçons qui font du russe donc : $P(R \cap G) = \dfrac{12}{40} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

   Il y a 20 élèves qui font du russe donc : $P(R) = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

2. « L'élève choisi est une fille qui étudie l'allemand » est l'événement $F \cap A$ et il y a 9 filles qui font de l'allemand ; $P(F \cap A) = \dfrac{9}{40} = 0{,}225$.

3. On cherche $P_R(G)$; $P_R(G) = \dfrac{P(R \cap G)}{P(R)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$.

4. On procède successivement deux fois au choix d'un élève, le même élève pouvant être choisi deux fois. On peut représenter les langues étudiées par les couples $(R\,;R)$, $(R\,;A)$, $(A\,;R)$ et $(A\,;A)$.
   L'événement « les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue » correspond à $(R\,;A) \cup (A\,;R)$.
   $P((R\,;A)) = P(R) \times P(A) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$;
   $P((A\,;R)) = P(A) \times P(R) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$;
   les deux événements $(R\,;A)$ et $(A\,;R)$ sont incompatibles donc la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités.
   La probabilité cherchée est $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$.



EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

1. Le nombre g_n représente le pourcentage de personnes inscrites au club l'année n, et p_n le pourcentage de personnes non inscrites à ce club. Donc $g_n + p_n = 1$.

2. **a.** Pour déterminer le pourcentage g_{n+1} des inscrits au club l'année $n+1$, il faut ajouter
   - 30 % des personnes inscrites au club l'année n, soit $0{,}3g_n$;
   - 10 % des personnes non inscrites l'année n, soit $0{,}1p_n$.

   Donc $g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1p_n$.

   b. On a vu que $g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1p_n$; or $g_n + p_n = 1$ donc :
   $g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1\left(1 - g_n\right) \iff g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1 - 0{,}1g_n \iff g_{n+1} = 0{,}2g_n + 0{,}1$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = g_n - 0{,}125$.

$u_{n+1} = g_{n+1} - 0{,}125 = 0{,}2g_n + 0{,}1 - 0{,}125 = 0{,}2g_n - 0{,}025$; or $u_n = g_n - 0{,}125$ donc $g_n = u_n + 0{,}125$.

Donc $u_{n+1} = 0{,}2\left(u_n + 0{,}125\right) - 0{,}025 = 0{,}2u_n + 0{,}025 - 0{,}025 = 0{,}2u_n$.

$u_0 = g_0 - 0{,}125 = 0{,}2 - 0{,}125 = 0{,}075$

Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}075$ et de raison $q = 0{,}2$.

4. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}075$ et de raison $q = 0{,}2$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 0{,}075 \times 0{,}2^n$.

On peut en déduire que tous les termes de la suite (u_n) sont positifs.

Pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}2u_n$; or $u_n > 0$ et $0{,}2 < 1$ donc $0{,}2u_n < u_n$ ce qui veut dire que, pour tout n, $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

5. On a vu que, pour tout n, $u_n = 0{,}075 \times 0{,}2^n$; or $g_n = u_n + 0{,}125$ donc $g_n = 0{,}125 + 0{,}075 \times 0{,}2^n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison 0,2 ; or $0 < 0{,}2 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0. Or $g_n = 0{,}125 + u_n$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de suites, la suite $\left(g_n\right)$ a pour limite 0,125.

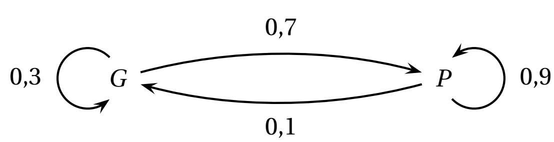
De plus, la suite (u_n) est décroissante donc la suite $\left(g_n\right)$ l'est aussi.

On peut donc dire que la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique tend en décroissante vers 12,5 %.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

1. On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste :



2. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{l} g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1p_n \\ p_{n+1} = 0{,}7g_n + 0{,}9p_n \end{array}\right.$; donc $\begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{n+1} & p_{n+1} \end{pmatrix}$

La matrice de transition est donc $A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

3. $E_1 = E_0 \times A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix}$

Donc au bout d'un an, il y a 14 % de la population qui est inscrite au club de gymnastique et 86 % qui ne l'est pas.

$E_2 = E_1 \times A = \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}86 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}128 & 0{,}872 \end{pmatrix}$

Donc au bout de deux ans, il y a 12,8 % de la population qui est inscrite au club de gymnastique et 87,2 % qui ne l'est pas.

4. L'état probabiliste stable est l'état $\begin{pmatrix} g & p \end{pmatrix}$ tel que $\left\{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} g & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & p \end{pmatrix} \\ g + p = 1 \end{array}\right.$

$\begin{pmatrix} g & p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & p \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} 0{,}3g + 0{,}1p = g \\ 0{,}7g + 0{,}9p = p \end{array}\right. \iff 0{,}7g - 0{,}1p = 0 \iff 7g = p$

$\left\{\begin{array}{l} 7g = p \\ g + p = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} g = 1/8 \\ p = 7/8 \end{array}\right.$; l'état stable est $\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}$.

Si le pourcentage d'inscrits au club de gymnastique est 12,5 %, ce pourcentage restera stable pour les années suivantes.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. La fonction G définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $G(x) = x\ln x - x + 10$
   $G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$
   Donc G est une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln x$.
   Affirmation vraie
2. La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ a pour primitive $F : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + x$.
   Donc $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) \,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0 = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{3}$
   Affirmation fausse
3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   On sait d'après le cours que l'espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ est $\dfrac{b+a}{2}$; sur l'intervalle $[0\,;1]$ on a : $E(X) = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \neq 1$.
   Affirmation fausse
4. Dans une population, la proportion de garçons à la naissance est $p = 0{,}51$.
   Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :
   $$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   Pour $n = 100$ et $p = 0{,}51$ l'intervalle est : $\left[0{,}51 - 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}51\,(1-0{,}51)}}{\sqrt{100}}\ ;0{,}51 + 1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}51\,(1-0{,}51)}}{\sqrt{100}}\right]$
   ce qui donne bien, en arrondissant à 0,001 près, l'intervalle $[0{,}412\,;0{,}608]$.
   Affirmation vraie

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$ par $f(x) = (3-x)\,\mathrm{e}^{x} + 1$.

1. $f'(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{x} + (3-x)\,\mathrm{e}^{x} = (2-x)\,\mathrm{e}^{x}$
   $f''(x) = (-1)\,\mathrm{e}^{x} + (2-x)\,\mathrm{e}^{x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{x}$
2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[2\,;5]$; pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$.
   Sur $]2\,;5]$, $2 - x < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$.
3. La fonction f est strictement décroissante sur $[2\,;5]$.
   De plus : $f(2) = (3-2)\,\mathrm{e}^{2} + 1 = \mathrm{e}^{2} + 1 \approx 8{,}4 > 0$ et $f(5) = (3-5)\,\mathrm{e}^{5} + 1 = -2\,\mathrm{e}^{5} + 1 \approx -296 < 0$.
   Or $0 \in \left[f(5)\,;f(2)\right]$ donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2\,;5]$.
   Comme $f(3) = (3-3)\,\mathrm{e}^{3} + 1 = 1 > 0$ et $f(4) = (3-4)\,\mathrm{e}^{4} + 1 = -\,\mathrm{e}^{4} + 1 \approx -53{,}6 < 0$, on peut dire que : $3 < \alpha < 4$.
4. **a.** Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
   La droite T a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$;
   or $f'(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^{x}$ donc $f'(3) = (2-3)\,\mathrm{e}^{3} = -\,\mathrm{e}^{3}$ et $f(3) = 1$.
   Donc l'équation de T est : $y = -\,\mathrm{e}^{3}(x-3) + 1$ soit $y = -\,\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1$.

   b. Le point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 et pour abscisse la solution de l'équation $-\,\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 = 0$.
   $-\,\mathrm{e}^{3}x + 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 = 0 \iff 3\,\mathrm{e}^{3} + 1 = \mathrm{e}^{3}x \iff \dfrac{3\,\mathrm{e}^{3} + 1}{\mathrm{e}^{3}} = x \iff x = 3 + \mathrm{e}^{-3}$
   Le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $\left(3 + \mathrm{e}^{-3}\,;0\right)$.

c. $f''(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{x}$ est du signe de $1-x$ car $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout x.
Sur $[2\,;5]$, $1-x<0$ donc $f''(x)<0$ donc f est concave.

d. Sur $[2\,;5]$, la fonction f est concave ; donc sur $[2\,;5]$, la courbe représentant f est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
Le point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses est donc situé à gauche du point d'intersection de la tangente T avec cet axe.
Donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses (la solution de l'équation $f(x)=0$) est inférieure à l'abscisse du point d'intersection de T avec l'axe des abscisses : $\alpha < 3+\mathrm{e}^{-3}$.
On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} < 3{,}05$.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a,b,m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3
	Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b-a>r$
	Affecter à m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	SI $f(m)>0$
	ALORS Affecter à a la valeur m
	SINON Affecter à b la valeur m
	FIN SI
	FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

a. On fait fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0{,}01$:

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2	0,025	oui	3,037 5	0,218	oui	3,037 5	3,05
étape 3	0,012 5	oui	3,043 75	0,082	oui	3,043 75	3,05
étape 4	0,006 25	non					

b. Cet algorithme permet de donner un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie.
On peut donc dire que le nombre α appartient à l'intervalle $[3{,}043\,75\,;3{,}05]$.