

MATH & MEDIA



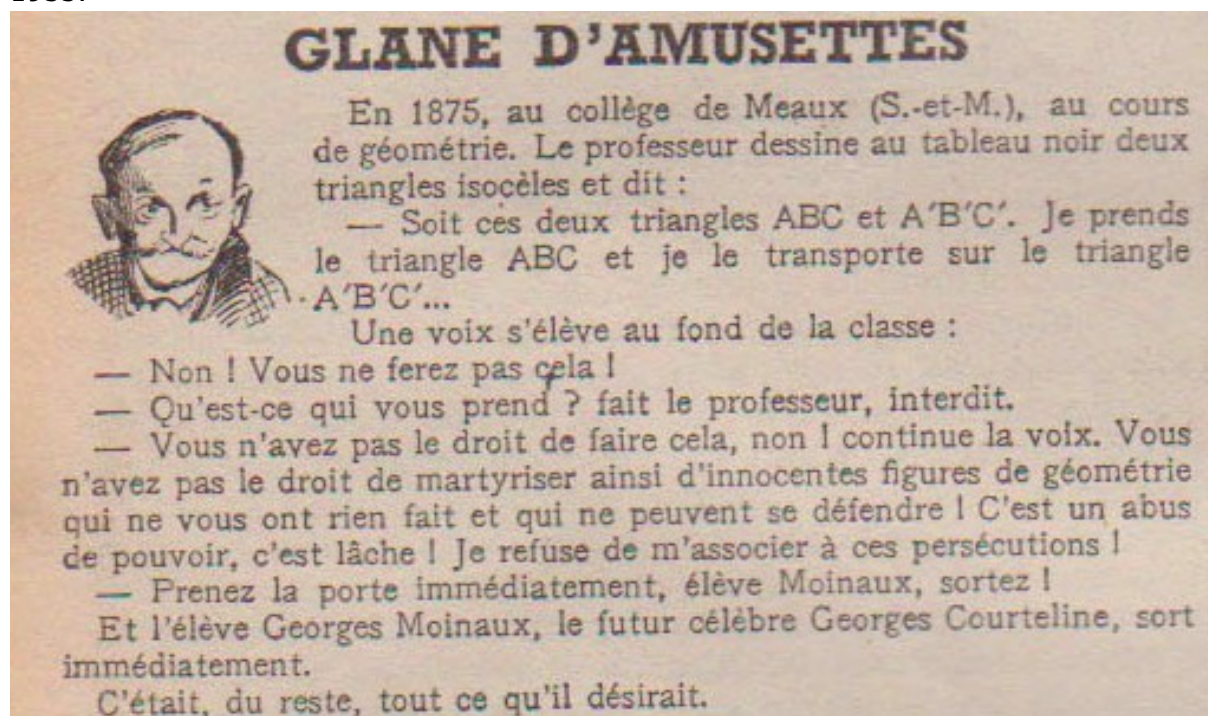
Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi - et surtout - les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.

Envois par la poste à Jacques VERDIER (7 rue des Bouvreuils, 54710 FLEVILLE) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr.

Les archives de cette rubrique seront bientôt disponibles sur notre nouveau site à l'adresse : www.apmeplorraine.fr

DU TRANSPORT DES TRIANGLES

Voici un extrait de la rubrique « Glane d'amusettes » du « Chasseur Français » de Janvier 1955.



140 ans plus tard, le lecteur peinera sans doute à reconnaître ce qui était dit jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle lors de la justification des « cas d'égalités de triangles ». Cependant les récentes propositions de programme pour les trois dernières années du collège (le cycle 4) évoquent les mots « symétrie », « rotation » et « translation », permettant de continuer à « transporter » ou « déplacer » des triangles. Les « cas d'égalité » des triangles sont encore au programme.

Contrairement aux programmes de 2008, ces nouveaux programmes remettent en avant le sens des notions abordées en classe et susciteront sans doute moins de sorties d'élèves...

Sitographie

http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400

Complément : cas d'égalité des triangles chez Euclide

Euclide s'interdisait les démonstrations avec « mouvements » (c'est-à-dire déplacements), préférant les raisonnements par l'absurde (*si telle proposition était fausse, il s'en suivrait une contradiction, donc elle est vraie*). Cependant, pour le troisième cas d'égalité des triangles, il

s'autorise un déplacement : c'est, à notre connaissance, la seule proposition du premier livre d'Euclide qui utilise cette démarche. La proposition à démontrer est la suivante : *deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur.*

La proposition d'Euclide

Proposition IV (livre 1) : Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par ces côtés sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux.

Démonstration due à Euclide

Soient les deux triangles ABC, DEF ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun (le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DF), et qu'ils aient aussi l'angle BAC égal à l'angle EDF ; je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC est égal au triangle DEF et que les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun : l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Car le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, et la droite AB sur la droite DE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à DE ; mais AB étant appliqué sur DE, la droite AC s'appliquera sur DF, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF ; donc le point C s'appliquera sur le point F, parce que AC est égal à DF ; mais le point B s'applique sur le point E ; donc la base BC s'appliquera sur la base EF.

Car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point C sur le point F, la base BC ne s'appliquait pas sur la base EF, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (demande 6*) ; donc la base BC s'appliquera sur la base EF, et lui sera égale ; donc le triangle entier ABC s'appliquera sur le triangle entier DEF, et lui sera égal ; et les angles restants s'appliqueront sur les angles restants, et leur seront égaux, l'angle ABC à l'angle DEF, et l'angle ACB à l'angle DFE.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Ce qu'il fallait démontrer.

(*) La « demande », chez Euclide, est ce que nous appelons « axiome » ou « postulat » ; la sixième demande pourrait se traduire ainsi : « Deux droites ne renferment pas un espace ». Attention, ce qu'Euclide appelle « droite » correspond le plus souvent à ce qui est pour nous un segment ; par exemple son second postulat pourrait se traduire par « On peut prolonger indéfiniment une droite finie » (autrement dit un segment...).

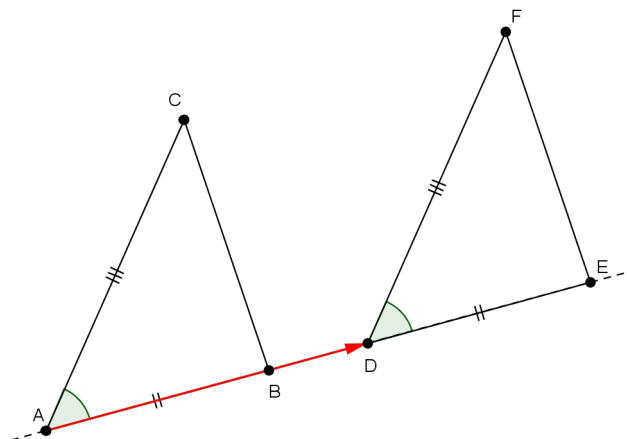


Figure correspondant à la démonstration d'Euclide

TROUVER LE QUATRIÈME

Par François DROUIN

Suite à l'atelier « La règle de trois au Cycle 3 » de la journée régionale de mars 2012, j'avais déposé certains documents présentés sur l'ancien site de notre régionale. Celui-ci est de nouveau actif, les documents sont maintenant accessibles à l'adresse http://apmeplorraine.fr/old/modules/regionale/jr_2012/B01_Trouver_le_quatrieme.zip.

J'ai alors eu envie de repréciser et compléter ce qui avait été dit pendant l'atelier.

Dans les programmes 2008, au CM1 et au CM2

- *Utiliser un tableau ou la "règle de trois" dans des situations très simples de proportionnalité.*
- *Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").*

Le but de l'atelier était d'une part de préciser ce qui se cachait derrière l'expression « règle de trois » et la présentation de « procédures variées » pouvant être mises en œuvre par les élèves. Il est à noter que les enseignants de Cycle 3 durent attendre 2012 et la parution du document « Le nombre au Cycle 3 » pour avoir des précisions officielles au sujet de ce qui était attendu à propos de l'enseignement de cette « règle de trois ».

Ce document est accessible en particulier sur le site national de l'APMEP à l'adresse http://www.apmep.fr/IMG/pdf/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf.

Présentation des documents

Cinq séries de tableaux sont proposées. Ils pourront être découpés pour les élèves, agrandis pour être présentés face à la classe ou être projetés au tableau. Voici deux exemples extraits du premier ensemble.

3 roses	2 €		4 roses	7 €
6 roses	4 €		5 roses	8,75 €

Pour certains tableaux, les opérateurs mis en jeu peuvent être trouvés mentalement, pour d'autres, un calcul posé ou une calculatrice sera nécessaire. L'entourage des cases du bas est différent de celui des cases du haut : ceci sera utilisé lorsque les rectangles d'un tableau seront présentés dans un ordre quelconque.

La première série aborde des prix de roses, la deuxième des changements d'unités, la troisième est une rencontre avec « pour 100 », la quatrième est une approche de la notion de vitesse horaire et la cinquième fait travailler avec l'échelle d'un plan.

Remarque : dans la quatrième série, un mot « pour » a été oublié dans un rectangle du jeu « 1e » ...

.../...

LE SOPHISME DU TRIMESTRE

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit.
Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Théorème : La somme des racines carrées de deux nombres est égale à la racine carrée du double de leur somme : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2(a+b)}$.

Soit un triangle ABC, et la hauteur CF issue de C. On pose $p = AF$, $q = FB$, $h = CF$.

On considère le segment DE parallèle à CF qui partage le triangle ABC en deux parties d'aires égales.

On pose $x = AE$, $y = EB$ et $h' = DE$ (voir figure ci-contre).

L'aire de AED est égale à l'aire de EBCD ; l'aire de ABC est donc le double de l'aire de AED (1).

Ce qui peut s'écrire $\frac{1}{2}(p+q)h = 2 \times \frac{1}{2} x h' = x h'$ (2)

Par ailleurs, le triangle AED est semblable au triangle AFC, d'où $\frac{h'}{h} = \frac{x}{p}$, d'où $h' = h \frac{x}{p}$ (3).

En reportant dans (2), il vient $\frac{1}{2}(p+q)h = \frac{x^2 \cdot h}{p}$ (4), d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}$ (5).

De la même manière, puisque x et q d'une part et y et p d'autre part jouent des rôles symétriques,

on a $y = \sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$ (6).

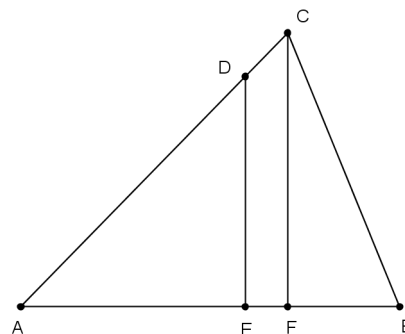
En additionnant (5) et (6) il vient : $x + y = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}} + \sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$,

et – puisque $x + y = p + q$, $p + q = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}} + \sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$ (8).

En divisant les deux membres de cette égalité par $\sqrt{p+q}$, on obtient $\sqrt{p+q} = \sqrt{\frac{p}{2}} + \sqrt{\frac{q}{2}}$ (9).

En posant $a = \frac{p}{2}$ et $b = \frac{q}{2}$, cette dernière égalité devient $\sqrt{2a + 2b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Le théorème énoncé ci-dessus est donc démontré.



Solution du Sophisme précédent (Petit Vert n°124)

3 = 2, la preuve...

Rappel de l'énoncé : On sait que la dérivée de x^3 est $3x^2$. Mais x^3 , c'est aussi x fois x^2 , ce qui s'écrit aussi, si on prend x entier : $x^2 + x^2 + \dots + x^2$, où on a écrit x fois x^2 . On dérive alors cela comme une somme (la dérivée de x^2 est $2x$) : la dérivée de x^3 est $2x + 2x + \dots + 2x$ où on a écrit x fois $2x$. Cette dérivée est donc $x \cdot 2x = 2x^2$; on a donc obtenu, pour les valeurs entières de x : $3x^2 = 2x^2$. On en conclut que $3 = 2$.

Il y a en fait deux erreurs de raisonnement. Dire que x^3 vaut $x^2 + x^2 + \dots + x^2$ avec x termes n'est pas une de ces deux erreurs, c'est tout-à-fait correct : on a bien précisé que x était un entier.

La première erreur dans le raisonnement est la suivante : x est entier et on ne peut pas dériver une fonction définie uniquement sur les entiers (pour dériver une fonction en un point a , il est nécessaire que la fonction soit définie dans un **voisinage de a** , et pas seulement en a).

La seconde raison pour laquelle cette dérivation est fautive est que le nombre de termes de la somme dépend de x (puisque c'est x lui-même), et donc on ne peut pas dériver par rapport à cet x ! On peut dériver n termes dépendants de x , mais pas dériver x termes dépendants de x ...

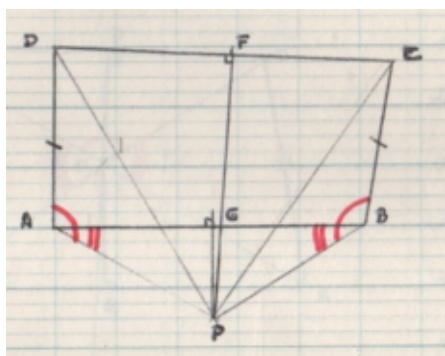
D'après <http://maths.amateurs.fr>

LE SOPHISME DU TRIMESTRE (N°128)

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Pour étudier ces sophismes, il est recommandé de faire les figures « à main levée », même si elles ne sont pas tout à fait exactes. L'usage de logiciels de géométrie dynamique est absolument proscrit. Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit. Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Un angle droit est égal à un angle obtus

Soit un quadrilatère ABCD, ayant un angle droit BAD, deux côtés égaux [AD] et [BC], et un angle obtus ABC (voir figure).



Traçons les médiatrices de [DC] et de [AB]. Elles se coupent en P, car (AB) et (DC) ne sont pas parallèles.

D'une part on a [PA]=[PB] car P est sur la médiatrice de [AB] et [PD]=[PC] car P est sur la médiatrice de [DC]. D'autre part, [AD]=[BC] par hypothèse.

Les triangles PAD et PBC sont donc égaux (3^e cas d'égalité des triangles).

D'où l'on tire que $\widehat{PAD} = \widehat{PBC}$. Les angles $\widehat{PAG}$ et $\widehat{PBG}$ sont également égaux. D'où, par différence de ces

angles, $\widehat{GAD}$ et $\widehat{GBC}$ sont égaux.

Et comme $\widehat{GAD}$ est un angle droit, $\widehat{GBC}$ l'est également.

La proposition est démontrée.

Ce sophisme a été publié dans l'ouvrage de W.W.R Ball, « *Mathematical recreations and essays* », publié à Londres en 1931.

SOLUTION DU SOPHISME PRÉCÉDENT (n°127)

Dans le dernier Petit Vert, nous démontrions que **tout triangle est isocèle** !

Bien entendu, la figure qui servait de support à notre démonstration était incorrecte...

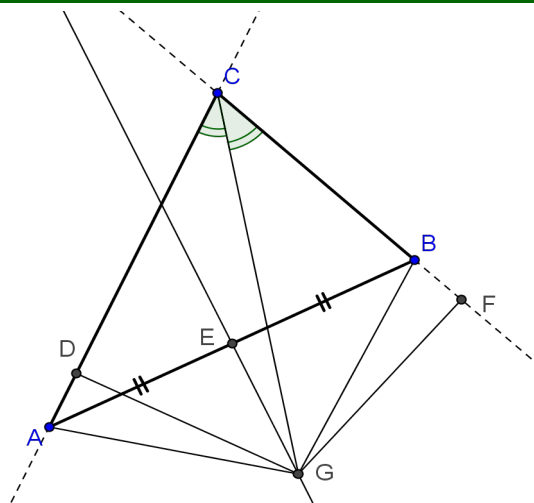
Les triangles GDA et GFB sont bien égaux (jusque là il n'y a aucune erreur dans le raisonnement). Mais les points D et F ne peuvent pas être tous les deux à l'extérieur du triangle (ni tous les deux sur les segments [AC] et [BC]).

L'un des deux est nécessairement sur l'un de ces deux segments, et l'autre sur son prolongement à l'extérieur du triangle.

Sur la figure ci-contre, qui - elle - est exacte, on a $CA = CD + DA$ alors que $CB = CF - FB$.

L'erreur est très facile à déceler par un élève de collège, à partir du moment où il réalise correctement la figure correspondant à l'énoncé.

Ce sophisme est extrait d'un ouvrage de W. W. R. Ball, « *Mathematical recreations and essays* », publié à Londres chez [McMillan](#) en 1931.



ÉTUDES MATHÉMATIQUES

GRANDEURS, PROPORTIONS, FRACTIONS ET NOMBRES...

*D'après une conférence donnée par Jean Dhombres
à Liège le 9 octobre 1996*

LES GRANDEURS CHEZ EUCLIDE

On ne trouve aucune définition du terme « grandeur » chez Euclide. Il y a des grandeurs « de même genre » : les longueurs, les surfaces, etc. Les entiers ne sont pas considérés comme des grandeurs.

L'opération fondamentale sur les grandeurs est **l'addition**.

Cette addition est intimement liée à l'ordre : si $A > B$, il existe C tel que $B + C = A$.

Cela donne, pour chaque type de grandeur, une structure de groupe abélien totalement ordonné et archimédien.

Euclide utilise un isomorphisme entre ces divers groupes : c'est la théorie des proportions ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$), développée au livre V.

Conséquence : le seul objet qui résume tous les autres est le rapport de longueurs $\frac{L}{L'}$; on peut donc mesurer une grandeur L **par** une autre grandeur L' .

Mais...

Rien dans Euclide ne permet d'ajouter un $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ à un autre (le $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ n'est pas une grandeur). On peut cependant les multiplier, comme une composition d'opérateurs :

$$\left[\frac{A}{B}\right] \times \left[\frac{B}{C}\right] = \left[\frac{A}{C}\right].$$

Remarque

Euclide ne définit pas le $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, mais il définit la proportion, ou égalité de raison ou analogie ($\alpha\nu\alpha\lambda o\gamma\iota\alpha$) $\left[\frac{A}{B}\right] = \left[\frac{C}{D}\right]$, « A est à B comme C est à D », d'une façon équivalant à ceci : il y a analogie si on ne peut 'rien' insérer entre les deux, c'est à dire s'il n'existe pas d'entiers m et p tels que $\left[\frac{A}{B}\right] < \frac{p}{m} < \left[\frac{C}{D}\right]$ (voir note ⁶).

On peut faire des calculs sur les $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ sans se préoccuper de la nature des grandeurs. Par exemple :

$$\text{si } \left[\frac{A}{B}\right] = \left[\frac{C}{D}\right], \text{ alors } \left[\frac{A}{B}\right] = \left[\frac{C}{D}\right] = \left[\frac{A+C}{B+D}\right].$$

Le problème qui va se poser jusqu'au XVII^e siècle :

Il y a deux théories entièrement distinctes,

- la théorie des proportions (livre V d'Euclide),
- la théorie des fractions d'entiers (livre VII).

6 En réalité, sa définition est la suivante : A et à B comme C et à D si, pour tous les entiers n et p possibles, les trois affirmations suivantes sont vraies simultanément :

- 1°) Si $nA > pB$ alors $nC > pD$,
- et 2°) Si $nA = pB$ alors $nC = pD$,
- et 3°) Si $nA < pB$ alors $nC < pD$.

LES MATHÉMATIENS ARABES

Les mathématiciens arabes (à partir du IX^e siècle) ont travaillé à partir des éléments d'Euclide et de la théorie des proportions. Mais en ce qui concerne le domaine numérique, ils ont profité de l'apport de la numération indienne décimale de position (sans toutefois perdre la numération sexagésimale, notamment en astronomie).

Le premier à utiliser les fractions décimales est **Al Uqlidisi** (première moitié du X^e siècle), dans *Kitab al fusul fi l'hisab al hindi*⁷.

A l'aide du principe que la moitié de 1 est un nombre, il peut remplacer $1/2$ par $0'5$. Par exemple, il divise 19 par 2 cinq fois successivement :

$$19 \rightarrow 9'5 \rightarrow 4'75 \rightarrow 2'375 \rightarrow 1'1875 \rightarrow 0'59375.$$

Il est très à l'aise dans l'utilisation des puissances de 10, n'hésite pas à diviser ou à multiplier un nombre par 10 en le déplaçant d'un rang vers la droite ou vers la gauche. Il insiste sur la nécessité de marquer par un signe (une espèce d'apostrophe) la place de la séparation des unités et de la partie fractionnaire. Lorsqu'il veut exprimer en toutes lettres un résultat, il exprime la partie décimale sous forme d'une fraction décimale : par exemple, $12'35$ se dira « douze et trente cinq centièmes » et il ajoute, pour correspondre au langage usuel, « douze et un quart et un dixième ».

Mais le changement ne s'est pas fait dans la vie courante : il aurait fallu abandonner une terminologie et des techniques héritées de traditions millénaires : l'une d'origine égyptienne, l'emploi des fractions unitaires ($1/2$, $1/3$, $1/4$...), l'autre d'origine babylonienne, l'emploi des fractions sexagésimales ; sans compter la répulsion que peut engendrer un système dans lequel les fractions les plus simples deviennent compliquées sinon inexprimables (par exemple le *danaq* ($1/6$) très fréquemment utilisé, qui devient un dixième et six dixièmes de dixième et six dixièmes d'ordre trois et six dixièmes d'ordre quatre etc.)⁸.

Malheureusement, l'œuvre de Al Uqlidisi est restée inconnue ; il a fallu attendre **Nasir ad Din at Tūsi** (1201-1274, œuvre publiée à Rome en arabe en 1594 et en latin en 1657), puis **Al Kaši** (1380-1429) pour trouver une véritable pratique de l'arithmétique décimale (les mêmes algorithmes, de multiplication par exemple, étaient utilisés pour les entiers et pour les décimaux, avec simplement un décalage de la virgule).

La redécouverte des décimaux en Europe à la fin du XVI^e siècle par Simon Stevin sera, elle, suivie de leur usage généralisé dans les livres d'abaques (tables de calcul). Ci-dessous un extrait de sa **Disme** :

Donne somme (par le 1^{er} probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ③ ① 0 ② 4 ③. Je di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ③ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3^e definition) $27 \frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, ensemble $27 \frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ③ 6 ① 7 ② 5 ③ valent $37 \frac{675}{1000}$, & les 8.75 ③ 7 ① 8 ② 4 ③ feront $875 \frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27 \frac{847}{1000}, 37 \frac{675}{1000}, 875 \frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10^e probleme de l'Arith.) $941 \frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ③ ① 0 ② 4 ③,

7 Écrite vers l'an 952, son œuvre n'a été découverte qu'en 1966.

8 D'après un article de Mahdi Abdeljaouad, paru dans le n°50 de *Miftah al Hissab*, bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, juin 1978.

مَحْمَدُ الْخَيَّام

'Umar al Khayyam (1048-1123) a beaucoup travaillé sur la théorie des proportions d'Euclide. En ce qui concerne les rapports incommensurables, qui posaient problème chez les grecs, il adopte une démarche qui consiste à décomposer un rapport A/B en une fraction continue :

à partir d'une longueur x , il cherche le plus grand entier q contenu dans x , et pose $x_1 = \frac{1}{x-q}$

(c'est à dire que $x = q + \frac{1}{x_1}$), nécessairement supérieur à 1 ; puis le plus grand entier q_1 contenu

dans x_1 , et pose $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1}$ (c'est à dire que $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$), et ainsi de suite.

Al Khayyam énonce qu'il y a égalité de deux rapports de grandeurs s'il y a égalité de leurs quotients partiels ($q, q_1, q_2 \dots q_n$) pour toute valeur de n :

Il définit d'abord l'égalité de deux rapports :

"Étant [données] quatre grandeurs [telles que] la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien [telles que] la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien [telles que] la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique."

En termes actuels, cela signifie que deux rapports sont égaux si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- i) $A = B$ et $C = D$,
- ii) $A = B/n$ et $C = D/n$,
- iii) $A = p \times B/n$ et $C = p \times D/n$.

Il s'intéresse ensuite au cas où aucune des conditions précédentes n'est vérifiée (ce que nous appelons les cas d'incommensurabilité)⁹.

Si les grandeurs ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première [contenus dans la seconde] jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la troisième, et que le nombre de multiples de la première contenu dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième [contenu] dans la quatrième. Et si après [cela], on retranche [de la première] tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde, et que de la même [manière], on retranche [de la troisième] tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre de multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième ; [...] Et si, lorsque de la même manière, on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre correspondant de la troisième et de la quatrième, [et ce] indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique [des grandeurs].

9 Extrait du chapitre *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels*, d'Éliane Cousquer, dans l'ouvrage *La mémoire des nombres*, Actes du X^{ème} colloque d'épistémologie et d'histoire des mathématiques à Cherbourg (27-29 mai 1994), édité par l'IREM de Basse-Normandie en 1997.

Et il s'efforcera de prouver que sa théorie est équivalente à celle du livre V d'Euclide. Il soulève alors le problème profond entre la notion de rapport (λόγος) et celle de nombre, qui est pour lui de nature philosophique :

« Un rapport peut-il être par essence un nombre, ou est-il seulement accompagné d'un nombre, ou encore le rapport est-il lié à un nombre non par nature mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport est-il lié au nombre et n'a-t-il besoin, de ce fait, de rien d'extérieur ? ¹⁰ »

LE XVII^e SIÈCLE EN OCCIDENT CHRÉTIEN

On voit apparaître des « *grandeurs numériques* » (cette terminologie disparaissant rapidement au profit de « *quantités* » ; plus tard Newton les qualifia de *nombre*s).

On arrive donc à une **identification** entre les grandeurs et leurs mesures : c'est clair chez Descartes, ça l'est encore plus chez Newton.

Ce qui a permis cette identification, ce sont les logarithmes. En 1620, Napier montre l'isomorphisme entre grandeurs ET addition d'une part, mesures ET multiplication d'autre part :

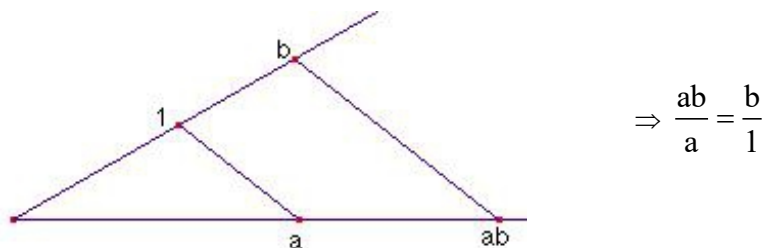
$$\log\left(\left[\frac{A}{B}\right] \times \left[\frac{C}{D}\right]\right) = \log\left(\left[\frac{A}{B}\right]\right) + \log\left(\left[\frac{C}{D}\right]\right)$$

À la moyenne arithmétique correspondra la moyenne géométrique, car :

$$\log \sqrt{xy} = \frac{\log x + \log y}{2}.$$

Les deux théories (celle des proportions et celle des fractions) sont désormais liées. L'analogie de structure a été comprise dès ce XVII^e siècle.

La « **révolution** » de Descartes (elle tient en une page et demie, au début de son livre *La Géométrie*, 1736) [voir en annexe] est une véritable révolution intellectuelle, qui gomme toute la théorie des proportions : le produit de deux longueurs peut être une longueur (et non plus nécessairement une surface). Tout se réduit au numérique, à partir du moment où on a choisi une unité.



LE XX^e SIÈCLE

Les « *grandeurs* » ont totalement disparu de l'enseignement secondaire (pas complètement du primaire). Or les fractions « passent mal ».

Voici ce qu'en pense Nicolas ROUCHE, dans un article intitulé *Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique* (Repères IREM¹¹ n° 14, d'avril 1996, pages 25 à 36), dont je vous recopie le début de l'introduction :

10 Citation trouvée dans *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, de Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer, éditions Point-Seuil, 1986, page 103)

11 http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/15_article_99.pdf

Les grandeurs sont le sujet du Cinquième Livre d'Euclide - l'un des plus importants des Éléments - et de nombreux travaux ultérieurs. Elles sont aussi l'objet de multiples observations et opérations quotidiennes : une chose est plus lourde qu'une autre, on ajoute une longueur à une autre, etc.

Or le progrès de la technologie au cours du XX^e siècle a abouti à une conséquence paradoxale. En effet, alors qu'un nombre croissant d'actions même parmi les plus quotidiennes s'appuient sur des mesures, les êtres humains manipulent de moins en moins des grandeurs dans des opérations pratiques de mesure : ils lisent directement sur des cadrans les résultats des mesures exécutées par des instruments automatiques.

Au cours du même siècle ou à peu près, les grandeurs ont disparu des mathématiques. Alors qu'elles avaient été au long de l'histoire le matériau même de l'élaboration des nombres, elles ont été remplacées par la théorie des nombres réels directement construits à partir des naturels, eux-mêmes rattachés à la théorie des ensembles. La mesure des grandeurs (à ne pas confondre avec la théorie mathématique de la mesure) est passée dans le domaine de la physique.

Les grandeurs ayant disparu des mathématiques, elles ont aussi quasiment disparu de l'enseignement, tout au moins aux niveaux secondaire et supérieur. Heureusement toutefois, l'étude de la droite réelle demeure associée à l'idée de mesure des longueurs. Il reste quelques traces des grandeurs dans l'enseignement primaire, principalement sous la forme de manipulations introduisant aux fractions et aussi dans l'étude du système décimal de mesures.

Or, même si les grandeurs ont disparu des mathématiques constituées, elles demeurent sans doute un passage obligé pour les enfants. En effet, d'abord nous vivons au milieu d'objets qu'il nous faut, avant même toute idée élaborée de mesure, saisir sous leur aspect de grandeur, et déjà à ce niveau un certain nombre de choses ne vont pas de soi. Ensuite, puisqu'on recourt sans cesse à des mesures dans la vie civilisée d'aujourd'hui, il faut bien apprendre en quoi elles consistent et ce qu'elles nous apportent. Enfin on peut croire que même si les réels peuvent être tirés axiomatiquement des ensembles sans passer par les grandeurs, la genèse des nombres dans chaque esprit passe nécessairement par les grandeurs et leur mesure.

Acceptons donc ce point de départ : il faut enseigner les grandeurs dans les écoles maternelles et primaires. *Bien sûr, il ne faut surtout pas organiser à ce niveau un enseignement axiomatique.* Il faut faire vivre et comprendre aux élèves l'essentiel des phénomènes familiers liés à la comparaison de deux grandeurs de même espèce, à l'addition des grandeurs, à leur multiplication et leur division par un nombre naturel. Ces phénomènes sont plus nombreux qu'on ne le croirait de prime abord.

ANNEXE

Extraits de « La Géométrie » de René Descartes, édition de 1886, Livre premier
**Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles
et des lignes droites.**

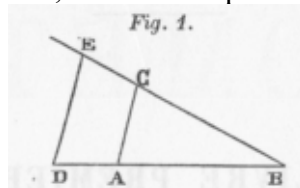
Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une

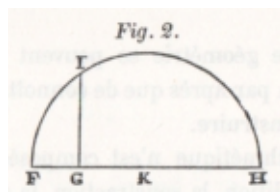
[Retour au sommaire](#)

espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerais l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut être ordinairement prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux autres comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

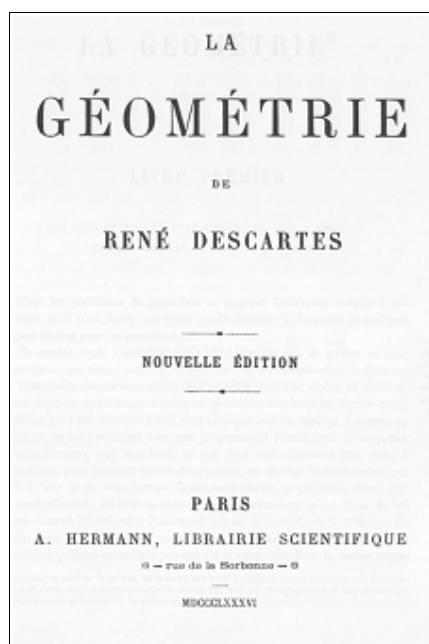
Soit par exemple AB l'unité (*figure 1*), et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.



Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.



Ou, s'il faut tirer la racine carrée de GH (*figure 2*), je lui ajoute une ligne droite FG qui est l'unité et, divisant FH en deux parties égales au point F, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée.



MATHS & MÉDIAS**TOUS LES NOMBRES ENTIERS SONT DES NOMBRES PREMIERS**

Voici quelques lignes extraites du calendrier 2017 créé pour « LA POSTE » par la société « Oberthur ».



En mathématiques, le chiffre 7 se situe entre le 6 et le 8, il est également le quatrième nombre premier (divisible par 1 ou lui-même). Le 7 correspond au numéro atomique de l'azote.

Comme souvent dans les médias, il semble difficile d'imager qu'un nombre entier puisse être écrit avec un seul chiffre. Il n'y a pas pourtant pas de difficulté à accepter les mots d'une lettre. Cette confusion « chiffre/nombre » avait déjà été évoquée dans le [Petit Vert n°121](#) à propos de « 5 » dans le calendrier 2015 du même éditeur.

À cette époque, nous n'avions pas évoqué cette intéressante précision à propos des nombres premiers : tout nombre entier est divisible par 1, nous en déduisons que tout nombre entier est premier, tout nombre entier est divisible par lui-même, nous en déduisons que tout nombre entier est premier. À moins que le mot « ou » ne soit un « ou exclusif » : dans ce cas, seul 1 est premier.

Soyez rassuré, le Petit Vert n'hésitera pas à mettre en avant les médias qui utiliseront le vocabulaire mathématique de manière pertinente et rigoureuse.

MATHS ET GASTRONOMIE**Des symboles mathématiques pour les amateurs de fondant au chocolat**

Sans avoir fait d'études scientifiques, l'acheteur comprend qu'en ajoutant 3 œufs et 125g de beurre au contenu de la boîte, on obtient une pâte qui, cuite au four entre 10 et 15 minutes, nous permet d'obtenir un gâteau pour 8 personnes.

Objection de l'acheteur utilisateur : on ne me dit pas comment régler le thermostat du four.

Objection du lecteur du Petit Vert : en classe, je ne me vois pas additionner des œufs avec des grammes de beurre et l'égalité n'est pas symétrique.

Faisant fi de cette objection, un de nos lecteurs a acheté cette préparation pour un « fondant au chocolat », l'a dégusté en famille et a eu envie de partager avec nous cet intéressant extrait de l'emballage.

DANS NOS CLASSES**MOSACCOLLA EN CLASSE DE SIXIÈME**

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Les MosaColla sont présentées dans la brochure « [Jeux 10](#) ». À l'origine, l'activité se déroule en classe entière. Il s'agit de colorier un motif sur une grille. Chaque élève reçoit une fiche avec des égalités numériques correspondant aux cases de la partie de la grille qu'il a en charge. Il étudie alors chacune des égalités, indique si elle est vraie ou fausse, puis noircit la case correspondante dans le cas d'une égalité fausse. Les grilles des élèves sont ensuite découpées puis assemblées pour former une mosaïque collective.

L'envie est venue au collège de Montmédy d'adapter ce principe pour faire vivre dès la rentrée en classe de sixième un moment de travail en groupe à propos des priorités opératoires.

Création des grilles

Pour les huit dessins, il y avait quarante-huit fiches à préparer. Deux heures ont été nécessaires pour préparer un fichier Excel (il est [accessible sur notre site](#)), mais dix minutes vous suffiront pour l'utiliser et créer de nouvelles grilles.

Chaque fichier est constitué de deux feuilles.

Premièrement, une feuille GRILLE où :

- * l'enseignant réalise son dessin : seuls les x dans les cases sont importants (en minuscule ou majuscule, il semble que les deux fonctionnent), mais avec de la couleur, on voit mieux la figure que l'on réalise,
- * l'enseignant tape ses propositions ; attention à bien respecter l'ordre : les VRAI à gauche, les FAUX à droite, surtout pas l'inverse sinon on obtient le dessin en négatif par rapport à celui prévu.

Deuxièmement, une feuille FICHES où :

- * il n'a rien à faire, c'est l'ordinateur qui fait tout, il n'y a qu'à imprimer. Les grilles prêtes à imprimer sont [accessibles sur notre site](#).

Mais attention :

- ne surtout pas modifier les cellules de cette feuille !!!! Normalement, il a été fait pour qu'on ne puisse pas le faire...
- ne surtout pas séparer les deux feuilles ou supprimer la première feuille !

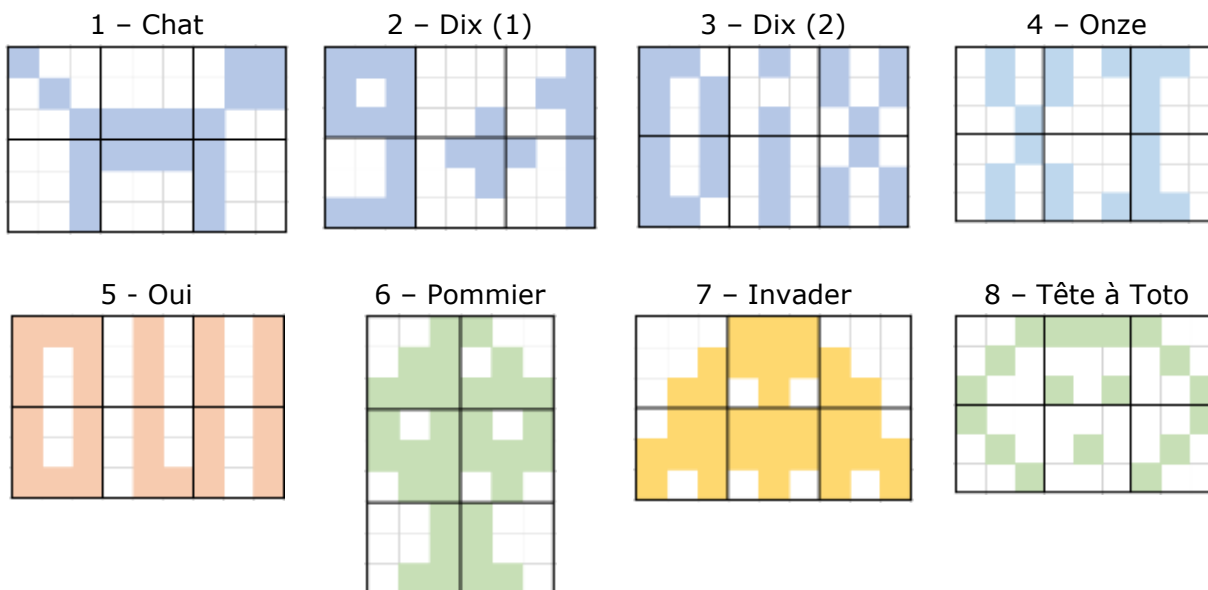
La brochure « Jeux 10 » a été utilisée : elle a fourni la méthode d'assemblage. Quant au plateau de jeu, il a dans un premier temps été réalisé avec du « copié-coupé-collé » non virtuel. Une des grilles a été photocopiée en l'agrandissant. Les carrés « intéressants » ont été découpés puis collés pour fabriquer la grille. Cela a ensuite été informatisé lorsque la première classe a dû recommencer son travail. Les annexes 2 et 3 de cet article présentent des documents utilisables en classe.

Remarques

Il aurait fallu faire plus attention en préparant les dessins, certaines grilles sont identiques. Dans ces cas-là, la sixième a été gardée (une de celles en double) et n'a été donnée qu'à la fin.

Lors de la préparation des grilles, s'est fait sentir le besoin d'un complément à la brochure « [Jeux 10](#) » comprenant des fichiers informatiques prêts à utiliser. Les [fichiers Excel](#) mis en téléchargement sur notre site pourront venir en compléments des fichiers .doc et .odt mis en [téléchargement sur le site national](#).

Les motifs à obtenir



Mise en œuvre dans les deux classes de sixième du collège de Montmédy

Les élèves ont travaillé en groupes constitués par affinité.

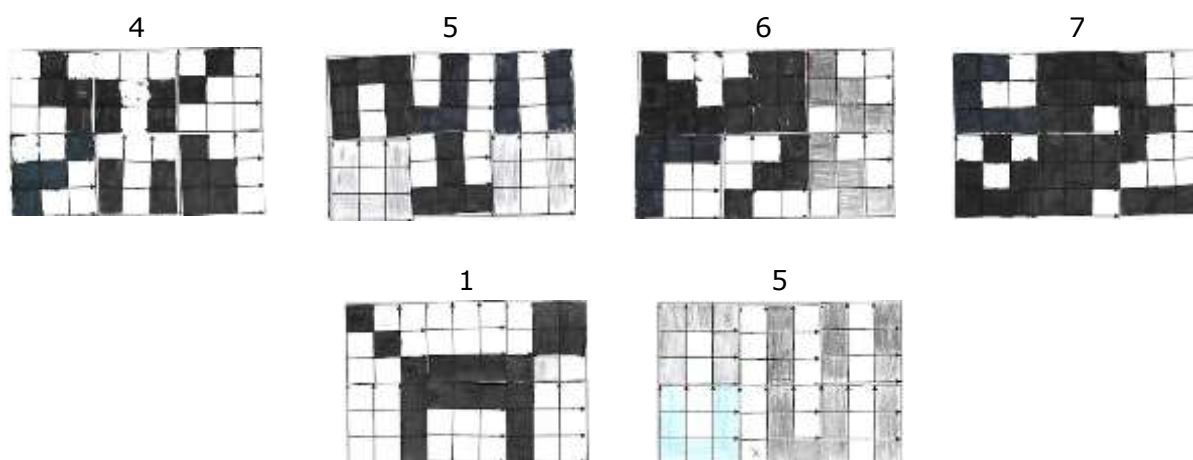
Bénéficiant cette année d'effectifs de vingt élèves, chaque groupe était composé de cinq élèves (sauf un groupe de quatre, un élève étant absent).

Chaque groupe avait dans une enveloppe les consignes, les six grilles de Vrai-Faux à se répartir, les grilles à colorier et le plan de montage.

Chaque élève devait réaliser une grille et la 6^e grille était réalisée par l'élève le plus rapide du groupe.

Le travail s'est fait sur deux séances (1h30 environ).

Voici ci-dessous le premier jet obtenu par quatre groupes de la première classe. Le dessin à obtenir est difficile à reconnaître. L'activité a été recommencée en insistant sur la nécessité de vérifier les réponses de chacun. Cela fut sans grand effet dans certains groupes.



Dans la seconde classe, ce besoin de vérifications a été annoncé avec insistance dès le départ. La qualité des productions s'est trouvée améliorée.

Grâce aux trois annexes suivantes, les lecteurs pourront s'entraîner sur une des MosaColla proposées au collège de Montmédy.

Annexe 1

Les grilles permettant d'obtenir le motif n°1. Ce document peut être obtenu à partir des fichiers Excel déposés [sur notre site APMEP Lorraine](#).

Grille A

Indique si chaque égalité est vraie ou fausse en entourant V ou F.
Colorie alors en **noir** les cases de la grille pour lesquelles les égalités sont **fausses**.

A1	$20 - (3 + 5) = 22$	V	F
B1	$8 + 2 \times 5 = 18$	V	F
C1	$12 - 2 + 1 = 11$	V	F
A2	$12 + 6 : 3 = 14$	V	F
B2	$24 : 6 \times 2 = 2$	V	F
C2	$17 - 7 \times 2 = 3$	V	F
A3	$4 \times 3 + 8 \times 2 = 28$	V	F
B3	$3 + (4 + 1) \times 2 = 13$	V	F
C3	$100 - (9 + 3 \times 7) = 16$	V	F

Grille B

Indique si chaque égalité est vraie ou fausse en entourant V ou F.
Colorie alors en **noir** les cases de la grille pour lesquelles les égalités sont **fausses**.

A1	$20 - (3 + 5) = 12$	V	F
B1	$8 + 2 \times 5 = 18$	V	F
C1	$12 - 2 + 1 = 11$	V	F
A2	$12 + 6 : 3 = 14$	V	F
B2	$24 : 6 \times 2 = 8$	V	F
C2	$17 - 7 \times 2 = 3$	V	F
A3	$4 \times 3 + 8 \times 2 = 40$	V	F
B3	$3 + (4 + 1) \times 2 = 16$	V	F
C3	$100 - (9 + 3 \times 7) = 16$	V	F

Grille C

Indique si chaque égalité est vraie ou fausse en entourant V ou F.
Colorie alors en **noir** les cases de la grille pour lesquelles les égalités sont **fausses**.

A1	$20 - (3 + 5) = 12$	V	F
B1	$8 + 2 \times 5 = 50$	V	F
C1	$12 - 2 + 1 = 9$	V	F
A2	$12 + 6 : 3 = 14$	V	F
B2	$24 : 6 \times 2 = 2$	V	F
C2	$17 - 7 \times 2 = 20$	V	F
A3	$4 \times 3 + 8 \times 2 = 40$	V	F
B3	$3 + (4 + 1) \times 2 = 13$	V	F
C3	$100 - (9 + 3 \times 7) = 70$	V	F

Grille D

Indique si chaque égalité est vraie ou fausse en entourant V ou F.
Colorie alors en **noir** les cases de la grille pour lesquelles les égalités sont **fausses**.

A1	$20 - (3 + 5) = 12$	V	F
B1	$8 + 2 \times 5 = 18$	V	F
C1	$12 - 2 + 1 = 9$	V	F
A2	$12 + 6 : 3 = 14$	V	F
B2	$24 : 6 \times 2 = 8$	V	F
C2	$17 - 7 \times 2 = 20$	V	F
A3	$4 \times 3 + 8 \times 2 = 28$	V	F
B3	$3 + (4 + 1) \times 2 = 13$	V	F
C3	$100 - (9 + 3 \times 7) = 16$	V	F

Grille E

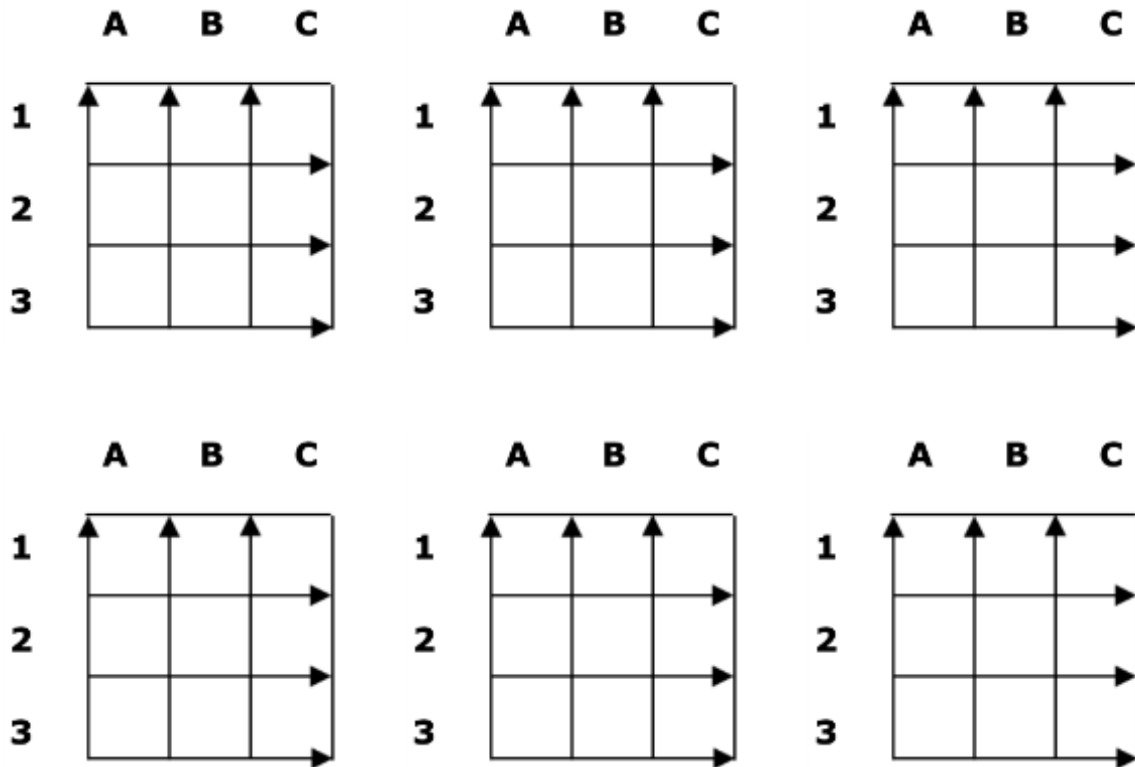
Indique si chaque égalité est vraie ou fausse en entourant V ou F.
Colorie alors en **noir** les cases de la grille pour lesquelles les égalités sont **fausses**.

A1	$20 - (3 + 5) = 22$	V	F
B1	$8 + 2 \times 5 = 50$	V	F
C1	$12 - 2 + 1 = 9$	V	F
A2	$12 + 6 : 3 = 14$	V	F
B2	$24 : 6 \times 2 = 8$	V	F
C2	$17 - 7 \times 2 = 3$	V	F
A3	$4 \times 3 + 8 \times 2 = 28$	V	F
B3	$3 + (4 + 1) \times 2 = 13$	V	F
C3	$100 - (9 + 3 \times 7) = 70$	V	F

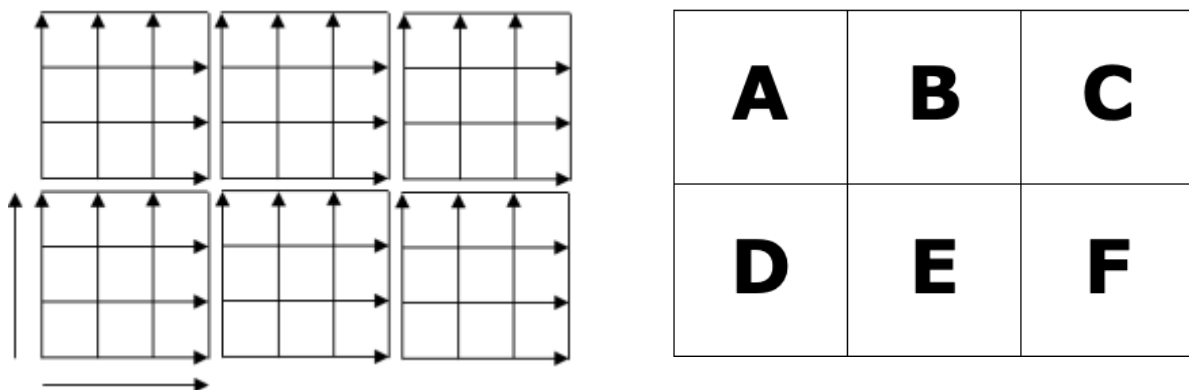
Grille F

Indique si chaque égalité est vraie ou fausse en entourant V ou F.
Colorie alors en **noir** les cases de la grille pour lesquelles les égalités sont **fausses**.

A1	$20 - (3 + 5) = 22$	V	F
B1	$8 + 2 \times 5 = 18$	V	F
C1	$12 - 2 + 1 = 11$	V	F
A2	$12 + 6 : 3 = 6$	V	F
B2	$24 : 6 \times 2 = 8$	V	F
C2	$17 - 7 \times 2 = 3$	V	F
A3	$4 \times 3 + 8 \times 2 = 40$	V	F
B3	$3 + (4 + 1) \times 2 = 13$	V	F
C3	$100 - (9 + 3 \times 7) = 70$	V	F

Annexe 2**Les carrés à remplir***D'après Jeux10***Annexe 3****Notice d'assemblage***(D'après Jeux 10)*

Une fois la totalité des grilles remplies, vérifiées et découpées, et après avoir pris la précaution de reporter au dos de chaque grille sa référence (lettre majuscule), il reste à les assembler suivant le plan ci-dessous en respectant leur orientation à l'aide des flèches.

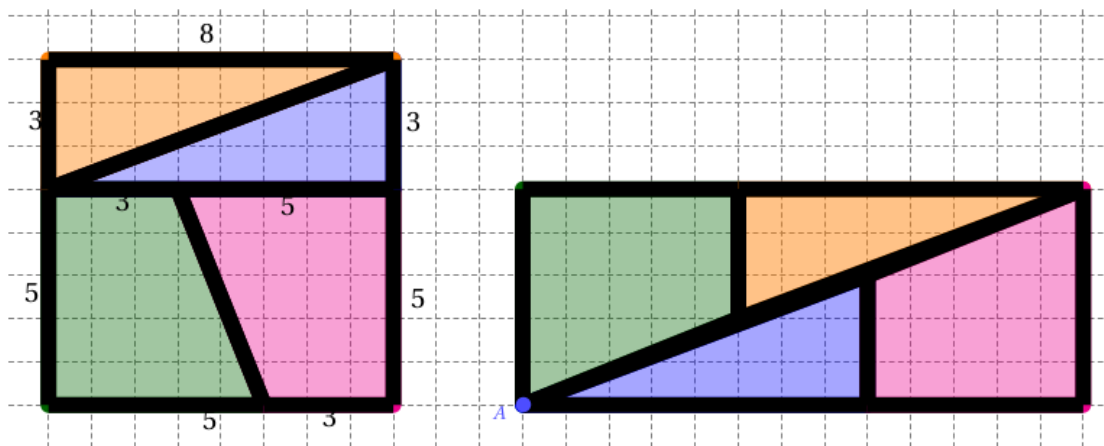


DANS NOS CLASSES

PUZZLE DE LEWIS CARROLL ET SUITE DE FIBONACCI

Gilles Waehren

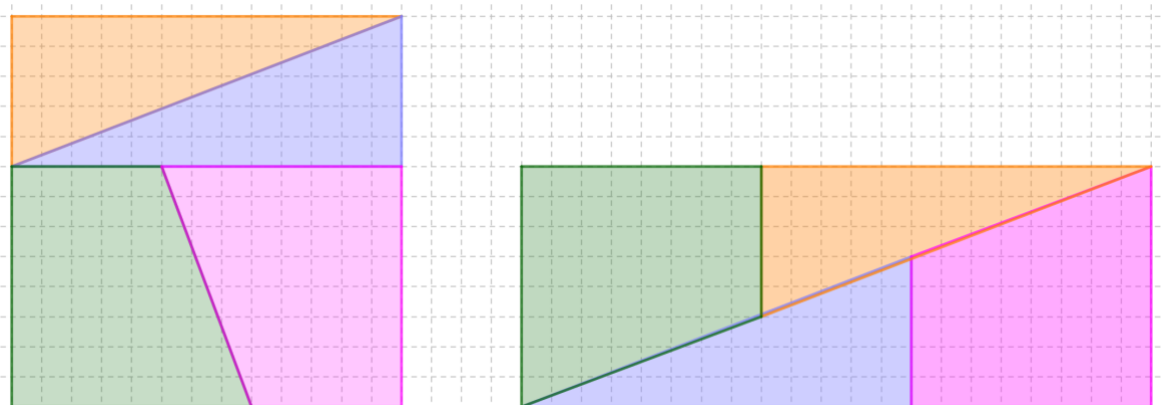
Voici un exercice d'un devoir maison donné en seconde en 2019 :



1. Calculer les aires des deux grands quadrilatères. Quel est le paradoxe dans cette configuration ?
2. On considère un repère de centre A. Déterminer les coordonnées des différents points de la figure dans ce repère. Expliquer le paradoxe.

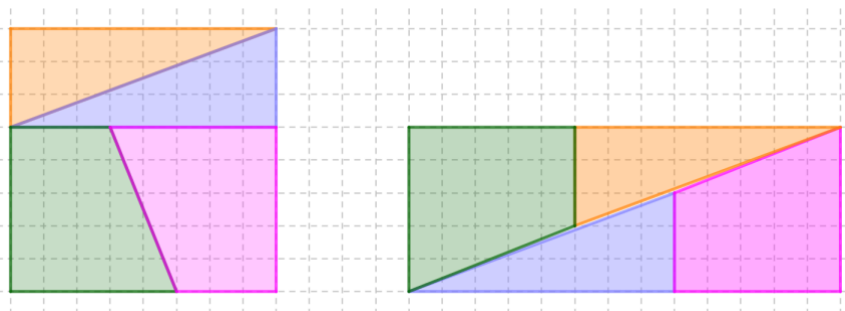
La méthode suggérée était analytique. Comme nous étions dans le chapitre des équations de droite, certains ont appuyé leur raisonnement sur la comparaison des coefficients directeurs ; d'autres ont préféré les coordonnées de vecteurs pour établir l'absence de colinéarité. Mais l'objet de cet article n'est pas d'analyser le travail de mes élèves ou les améliorations possibles de l'énoncé. Pour insister sur l'aspect paradoxal de la situation, j'avais grossi le trait... Le maximum d'épaisseur possible sur GeoGebra permet de masquer le parallélogramme d'aire 1 qui vient s'immiscer dans la figure de droite. Ce n'est guère élégant.

En revisitant dernièrement ce puzzle dans le cadre d'une réflexion sur les aires en cycle 3, je me suis rendu compte que les dimensions mises en jeu sont quatre termes consécutifs de la suite de Fibonacci : 3 – 5 – 8 – 13. M'est alors venue l'envie de tester le quadruplet suivant : 5 – 8 – 13 – 21. Les deux assemblages se font de la même manière, mais l'aire du carré de gauche est alors : $13^2 = 169$, tandis que le rectangle de droite a une aire égale à : $21 \times 8 = 168$. Dans ce cas, les pièces du puzzle de droite se chevauchent.



Mais la différence est moins perceptible que dans le premier cas :

[Retour au sommaire](#)



(L'échelle est quasiment la même pour les deux images)

Je cherche alors quelques informations à ce sujet sur la toile : le [site de Gérard Villemin](#) en parle, ainsi que ce [forum de mathématiques.net](#). Le résultat est le suivant pour la suite de Fibonacci (u_n) : $(u_{n+1})^2 = u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n-1}$ ou encore

$$P_n : \ll (u_{n+1})^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^{n-1} \gg$$

Autrement dit, la différence des aires entre le carré et le rectangle est toujours égale à 1. Cette différence reste significative pour le puzzle classique, mais diminue en importance pour les puzzles de plus grandes dimensions.

La démonstration de l'égalité peut être donnée en Terminale :

P_0 est vraie, on a bien : $(u_1)^2 - u_0 u_2 = 1 - 2 = (-1)^{-1}$.

Montrons que P_n est héréditaire, c'est-à-dire que :

pour tout entier naturel k , $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie.

Soit k un entier tel que

$$(u_{k+1})^2 - u_k \times u_{k+2} = (-1)^{k-1}$$

On a alors : $(u_{k+2})^2 - u_{k+1} u_{k+3} = (u_{k+2})^2 - u_{k+1} (u_{k+2} + u_{k+1})$ par définition,

$$\text{donc } (u_{k+2})^2 - u_{k+1} u_{k+3} = (u_{k+2})^2 - u_{k+1} u_{k+2} - (u_{k+1})^2$$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1} u_{k+3} = u_{k+2} (u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+1})^2$$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1} u_{k+3} = u_{k+2} u_k - (u_{k+1})^2$$

$$(u_{k+2})^2 - u_{k+1} u_{k+3} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k, \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

On a obtenu l'égalité au rang $k+1$.

La relation est donc vraie pour tout naturel n .

Je n'ai pas écrit d'énoncé en Terminale. On peut très bien poser le paradoxe avec les figures 3 - 5 - 8 - 13 et 5 - 8 - 13 - 21 et laisser les élèves expliquer l'origine de l'illusion. Puis leur demander d'écrire la relation en fonction de n et la démontrer. Conclure en expliquant que le rapport de l'écart d'aires sur l'aire totale tend vers 0.

Note du comité de rédaction du Petit Vert : cette mise en œuvre de termes de la suite de Fibonacci est évoquée dans les pages 54 et 55 de la [brochure Jeux 8](#).

UN JOURNAL FRANÇAIS – MATHS

Valérien Sauton

Collège Marie Curie, Troyes

Cette activité a été proposée à une classe de 4ème de 25 élèves. C'est une classe qui a déçu au premier semestre dans la plupart des disciplines à cause d'un manque de dynamisme et d'investissement. En mathématiques, le niveau est assez homogène avec trois élèves en grande difficulté et peu d'élèves vraiment à l'aise. Beaucoup d'élèves de cette classe sont capables de bonnes choses sur des automatismes mais, par manque d'investissement, bloquent très rapidement sur des exercices de raisonnement et ne cherchent pas vraiment.

Comme le programme de français traite de la presse en 4ème, j'ai choisi de leur présenter une activité sous la forme d'un journal ([journal1](#)). L'activité est imprimée sur une page A3 en format livret.

Dans ce journal se trouvent le résumé d'un livre, un article sur un thème d'actualité (l'épiphanie), deux articles sur des métiers (notaire et architecte), un article sur les Kaplas, des offres promotionnelles et les prix de billets d'avion pour Toulouse-Strasbourg.

Après ce journal se trouvent plusieurs exercices dont certaines données nécessaires se trouvent dans les différents articles.

Mes intentions étaient multiples.

- 1)** Travailler sur la lecture de documents et habituer les élèves à mettre en évidence les données importantes dans un document.
- 2)** Montrer aux élèves l'utilisation des mathématiques dans la vie quotidienne et dans certains métiers.
- 3)** Donner aux élèves un exemple de journal avant leur travail en français sur la presse et leur demander d'écrire leurs propres articles sur des thèmes/métiers qui les intéressent, en utilisant des données chiffrées. (articles 1 et 2). C'est ma collègue de français, Agathe CARRIER, qui a poursuivi le travail de rédaction d'un article avec les contraintes d'un tel exercice.
- 4)** Changer l'attitude de nombreux élèves, les impliquer davantage dans leur apprentissage en leur montrant que les mathématiques pourraient leur servir plus tard.

De nombreuses notions mathématiques sont mélangées dans cette activité : proportionnalité (pourcentage, produit en croix), statistiques (moyenne, médiane), perspective cavalière, calcul de volume, théorème de Pythagore, ratio et probabilités.

[Retour au sommaire](#)

Certains de ces notions ont déjà été traitées en classe en détail (proportionnalité et théorème de Pythagore). Pour les autres, cette activité me permet d'en faire une première ou une deuxième approche avant d'explorer la notion plus en détail (statistiques, ratios, probabilités).

Planification

J'ai travaillé cette activité sur trois séances, en parallèle du travail sur la distributivité.

1ère séance : lecture du journal par les élèves, recherche et correction des exercices 1, 2 et début de recherche de l'exercice 3. (exercice à terminer à la maison avec quelques explications)

Lors de cette séance, les élèves ont avancé à leur rythme, m'appelant pour vérifier leurs résultats ou me demander une explication. Il m'a fallu rappeler au tableau comment effectuer un produit en croix et trouver la médiane d'une série de nombres.

2ème séance : moitié de séance sur la distributivité et moitié de la séance pour la recherche des exercices 4 et 5.

3ème séance : automatismes de distributivité, correction des exercices 4 et 5 et exercice 6 traité avec les élèves afin de travailler sur l'utilisation d'un ratio pour un partage.

Déroulement de l'activité

Tous les élèves de la classe se sont lancés dans une lecture attentive du journal. Certains (dont un élève décrocheuse), intéressés par le métier, ont lu avec une attention particulière l'article sur le métier d'architecte. Des élèves montraient quelques passages du journal à leur voisin de table avec le sourire. Un élève en difficulté m'a par exemple dit « vous avez raison, c'est un bon résumé Monsieur ». Les Kaplas ont rappelé de bons souvenirs à certains élèves et j'ai pu entendre certains commentaires « j'avais ça quand j'étais petit », « c'est trop bien les Kaplas »...

Mis dans de bonnes dispositions, les élèves se sont lancés avec davantage d'entrain que d'habitude dans la résolution des exercices.

Malgré le modèle, les élèves ont eu beaucoup de difficulté à faire l'exercice 3 et il m'a fallu les guider en détail au tableau pour la première question.

La question 3 de l'exercice 4 a bloqué la plupart des élèves de la classe. Il me faudra prévoir une version davantage guidée pour les plus faibles.

Exercice 3

$7,8 \times 3 = 23,4 \text{ mm} = 2,34 \text{ cm}$

$2,34 \times 5 = 11,7 \text{ cm}$



C'est un pavé

ABC est un triangle rectangle, l'égalité de Pythagore est vérifiée

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

donc $AC^2 = 2,34^2 + 11,7^2$

donc $AC^2 = 5,4756 + 136,89$

donc $AC^2 = 142,3656 \approx 11,93 \text{ cm}$

$11,93 \text{ cm} = 11,93 \text{ mm}$

La diagonale est de 1,193 mm

$7,8 \times 23,4 \times 11,7 = 21356,84$

Le volume est de 21356,84 mm³

Prix	50	85	260
Kapla	200	280	1000

Non

$50 \times 5 = 250$

Les échanges avec les élèves en traitant les exercices 5 et 6 ont été très intéressants.

Après l'explication des frais de notaire, j'ai expliqué aux élèves le principe du remboursement d'un prêt immobilier en m'aidant du tableur. Les élèves sont toujours très curieux de comprendre comment cela fonctionne et surpris de voir l'argent gagné par une banque grâce aux intérêts gagnés sur 25 ans.

L'exercice 6 m'a permis de présenter sur un exemple certaines notions mathématiques à maîtriser par un notaire pour traiter une succession. Là encore les élèves étaient intéressés et ont posé des questions.

Les exercices 7 et 8 m'ont permis de clôturer cette activité sur des questions relativement simples et d'introduire la notation que j'utiliserai par la suite pour indiquer la probabilité d'un événement.

Mon bilan

La première séance a été très agréable. La découverte du journal a stimulé de nombreux élèves mais beaucoup ont rapidement retrouvé leur attitude passive à partir de la 2ème séance dans les moments de recherche. Cet aspect m'a démoralisé pendant la 2ème séance. Les échanges pendant les corrections des exercices étaient cependant, et heureusement, intéressants.

Proposer une activité de ce type avec une classe dynamique sera certainement très plaisant. Je regrette que mes élèves préfèrent appliquer plutôt que réfléchir.

Le travail effectué en français et le bilan d'Agathe CARRIER

En français les élèves ont été répartis en groupe de 3-4 élèves. Chaque groupe devait écrire deux articles, si possible sur un métier ou sur le thème de l'égalité hommes-femmes (thème abordé juste avant en histoire-géographie). Un article sur un thème qui intéressait les élèves était aussi accepté, à condition qu'il y ait des données chiffrées.

Après ce travail, les élèves ont été répartis dans de nouveaux groupes, de 2-3 élèves. Chaque groupe possédait un jeu de tous les articles écrits précédemment et, jouant le rôle de comité de rédaction, devait sélectionner quelques articles pour écrire la Une d'un journal.

Agathe tire le même bilan que moi de son activité avec la classe. Si les tâches ont été réalisées, peu d'élèves se sont vraiment intéressés et pris au jeu et il a fallu les pousser pour obtenir des articles convenables.

Un journal en devoir maison pour les 6èmes

J'ai proposé un sujet semblable ([journal6](#)) à ma classe de 6ème en devoir maison. C'est une classe dynamique avec une majorité d'élèves avec de bonnes bases de primaire.

La forme du sujet a eu beaucoup de succès auprès des élèves. J'avais demandé en amont à une élève de la classe de me préparer un résumé du livre qu'ils devaient lire en français : Mes rêves au grand galop.

Pour les 6èmes j'ai ajouté une figure à compléter.

C'est un devoir maison long et j'ai récupéré de nombreux excellents travaux avec un bel investissement des élèves. Quelques élèves en difficulté qui ne peuvent pas avoir beaucoup d'aide à la maison se sont naturellement retrouvés bloqués sur beaucoup de questions.

Trouver un barème juste sur ce type de sujet est assez délicat.

Le sujet est long et certaines questions sont difficiles sans indication. Le barème est donc en général sur 22 ou 23 et un élève qui a 19/22 obtient 19/20.

Afin d'éviter cet écueil, je vais essayer dans les prochains devoirs d'évaluer ces devoirs par compétences et convertir ensuite en une note sur 20 en attribuant un certain nombre de points à chaque compétence.

Travaux des élèves

- « [Le salaire entre hommes et femmes](#) » par Paul ;
- « [Chef ou cheffe](#) » par Seif-Edine, Melinda, Zahra et Ethan ;

ET SI JE REPASSAIS LE CERTIFICAT D'ÉTUDES ?

François Drouin

Le 16 juin 2025, lors d'une « Journée de l'amitié » organisée à Sampigny (55), des « tempes grises » ont été au bout de cette envie. La partie « Mathématiques » leur a causé quelques soucis, en particulier ce problème :

Problème A. L'héritage

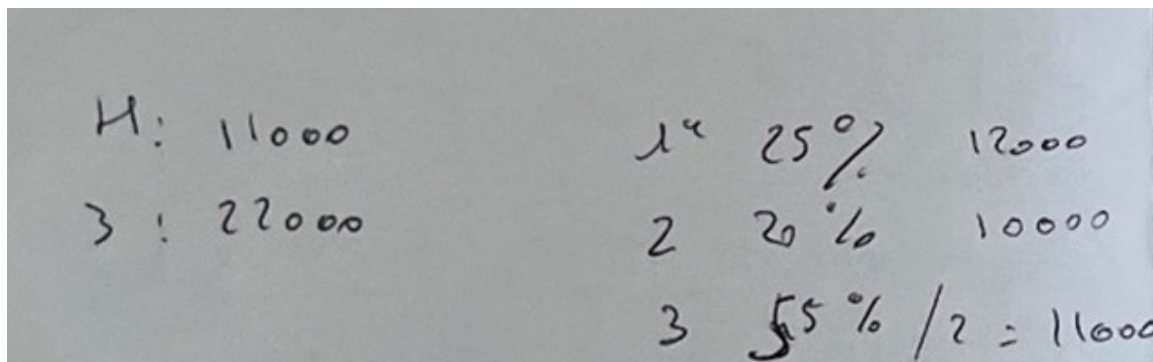
Un vieillard laisse en mourant sa fortune à 3 neveux. Le premier doit recevoir le $\frac{1}{4}$, le second en recevra le $\frac{1}{5}$, le dernier recevra le reste, mais il devra donner la moitié de sa part à l'hôpital. L'hôpital recevant 11 000 francs, trouvez la fortune du vieillard et la part de chaque neveu.

Part du premier neveu :	Part du deuxième neveu :
Part du troisième neveu :	Fortune du vieillard :

Analyse de quelques brouillons retrouvés sur les tables de candidats et candidates

Ce problème n'a été réussi par personne ce jour-là. Il a paru intéressant de jeter un œil sur ce qui avait été tenté.

Premier extrait de brouillon



11 000 francs sont en effet la moitié des 55% de l'héritage, donc 27,5% de l'héritage. Resterait donc à trouver la somme correspondant à 100% de l'héritage.

[Retour au sommaire](#)

27,5% de l'héritage valent 11 000 francs.

1% de l'héritage vaut 11 000 : 27,5 francs soit 400 francs.

100% de l'héritage valent donc 400 x 100 francs soit 40 000 francs.

Les parts de chaque neveu se calculent alors aisément.

Deuxième extrait de brouillon

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$20 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{22000}{10} \quad 25\%$$

$$20\%$$

$$C + H = 22000 = 550$$

$$4000$$

L'utilisation de pourcentages est également préférée à l'utilisation de fractions.

Cette démarche aurait pu aboutir. Le zéro barré en bas de l'extrait fait-il partie de la recherche du montant total de l'héritage ?

Troisième extrait de brouillon

$$3 \times 22000 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Total} = \frac{11000}{20} \div \frac{1}{4} = 22000$$

$$\frac{4000}{100} \div \frac{1}{4} = 22000$$

$$\frac{60000}{20} \div \frac{1}{4} = 120000$$

$$\frac{17000}{10} \div \frac{1}{4} = 68000$$

$$\frac{13200}{10} \div \frac{1}{4} = 52800$$

$$\frac{28800}{10} \div \frac{1}{4} = 115200$$

$$\frac{18700}{10} \div \frac{1}{4} = 74800$$

$$\frac{22500}{10} \div \frac{1}{4} = 90000$$

$$\frac{18700}{10} \div \frac{1}{4} = 74800$$

$$\frac{3800}{10} \div \frac{1}{4} = 15200$$

Les fractions sont ici utilisées, mais les sommes 22 000 francs et 11 000 francs ne réussissent pas à devenir des fractions de l'héritage total.

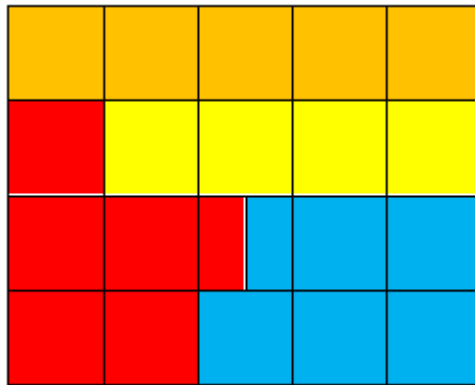
Il est intéressant de constater que quelques dizaines d'années après avoir quitté l'école, le travail avec des fractions n'est pas facile et est pour ce problème remplacé avec plus de succès par leur transformation en pourcentages.

Nous avons de notre côté essayé d’imaginer diverses méthodes de résolution de ce problème.

Solution 1

$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ Je visualise la situation par un rectangle 5x4.

En orange, le quart pour le premier. En jaune, le cinquième pour le second. En rouge et bleu, le reste avec en rouge la part pour l’hôpital et en bleu la part pour le troisième.



L’hôpital reçoit 11 000 francs.

5,5 carreaux représentent 11 000 francs

11 carreaux représentent 22 000 francs.

1 carreau représente 2 000 francs.

En orange, 5 carreaux pour le premier donc 10 000 francs.

En orange, 4 carreaux pour le premier donc 8 000 francs.

En rouge et bleu, 5,5 carreaux pour l’hôpital et le troisième donc deux fois 11 000 francs.

La fortune du vieillard est donc (10 000 + 8 000 + 2x11 000) francs soit 40 000 francs.

Solution 2 utilisant un modèle en barres

Fortune du vieillard		
Premier neveu	Deuxième neveu	Troisième neveu et hôpital
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	11 000 francs + 11 000 francs
$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$		« 11 000 francs + 11 000 francs » représentent donc $\frac{11}{20}$ de la fortune du vieillard.

$$22\,000 \text{ francs} = \frac{11}{20} \times \dots \text{ francs}$$

La fortune du vieillard est 22 000 francs : $\frac{11}{20}$ soit $22\,000 \text{ francs} \times \frac{20}{11}$.

La fortune du vieillard est 40 000 francs.

Solution 3 algébrique

J'appelle f le montant de la fortune du vieillard.

Les deux premiers neveux reçoivent $\frac{1}{4}f + \frac{1}{5}f$, c'est-à-dire $\frac{9}{20}f$.

$\frac{11}{20}f$ n'ont pas encore été distribués.

La moitié de ce qui n'a pas encore été distribué est égale à 11 000 .

$$\frac{11}{20}f \times \frac{1}{2} = 11000$$

$$\frac{11}{40}f = 11000$$

$$f = (11000 \times 40) : 11 = 40000$$

La fortune du vieillard est 40 000 francs.

Solution 4 imaginée par une enseignante en classe de quatrième

Part du troisième avant partage avec l'hôpital : $1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = \frac{20}{20} - (\frac{5}{20} + \frac{4}{20}) = \frac{11}{20}$.

Part de l'hôpital : $\frac{1}{2}$ de $\frac{11}{20}$.

$$\frac{1}{2} \times \frac{11}{20} = \frac{11}{40}$$

$\frac{11}{40}$ de la somme de départ = 11 000 francs

Donc somme de départ :

$\frac{40}{40}$ de la somme de départ = 40 000 francs.

Quelques élèves le voient immédiatement. Pour les autres, sont utilisés un tableau de proportionnalité et l'égalité des produits en croix (ça, ça passe beaucoup mieux que l'utilisation des fractions...) :

Part	11	11 000
Total	40	?

Part du premier (francs)

$$\frac{1}{4} \text{ de } 40\,000 = \frac{1}{4} \times 40000 = \frac{40000}{4} = 10000.$$

Part du deuxième (francs)

$$\frac{1}{5} \text{ de } 40\,000 = \frac{1}{5} \times 40000 = \frac{40000}{5} = 8000.$$

Part du troisième : 11 000 francs

Part de l'hôpital : 11 000 francs

Vérification

$$10\,000 \text{ francs} + 8\,000 \text{ francs} + 11\,000 \text{ francs} + 11\,000 \text{ francs} = 40\,000 \text{ francs}$$

Conclusion

La variété des démarches possibles ne nous donne pas envie d'en privilégier une. En 2025, est-il encore possible d'en présenter plusieurs, de laisser du temps aux élèves pour se les approprier et leur fournir des éléments de choix utilisables lors de la résolution de problèmes futurs ?

Complément

Dans ce livre de problèmes, nous retrouvons un problème dont l'énoncé ressemble à celui proposé en juin à Sampigny.

Un homme, en mourant laisse $\frac{1}{3}$ de sa fortune à son fils, $\frac{1}{4}$ à sa fille et le reste à sa femme. Quelle fraction de sa fortune sa femme aura-t-elle ?

Sachant que la part de sa femme est de 24 000 francs, trouver la part du fils et de la fille.

Demander la fraction de sa fortune reçue par sa femme est très certainement une aide à la résolution de ce problème.

SIX EST-IL DEVENU ÉGAL À NEUF ?



Rassurons nos lecteurs, cette égalité repérée sur cet emballage signifie simplement que la longueur des six rouleaux est égale à la longueur de neuf rouleaux « ordinaires ».

Avec des élèves, il y a de quoi travailler sur l'agrandissement de la longueur des rouleaux vendus. Il y a également de quoi réviser son anglais...

Cette surprenante égalité nous a remis en mémoire le nom d'une voiture allemande construite après la deuxième guerre mondiale.



La «DKW3=6 » avait un moteur « deux temps » comportant trois cylindres.

Cette égalité « 3 = 6 » voulait montrer qu'un moteur à trois cylindres délivrant sa puissance tous les deux temps était équivalent à un moteur « à six cylindres » délivrant sa puissance tous les quatre temps.