Baccalauréat Série mathématiques Égypte juin 1958

EXERCICE 1

1 er sujet. - Variation et représentation graphique de

$$y = \frac{x^2-2x-3}{x^2+2x-3}.$$

2e sujet. - Dérivée de $y = uv$, où u et v sont deux fonctions de x.
Dérivée de $y = u^m$, où m est un entier positif.

3e sujet. - Résoudre et discuter le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lcl} mx+2y & = & 2\\ (m+1)x+(m-1)y & = & 3.\end{array}\right.$$

EXERCICE 1

Dans un système d'axes rectangulaires Ox, Oy on donne l'ellipse (E), d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et son cercle principal (C), d'équation $x^2+y^2=a^2$.
On désigne par M un point de l'ellipse, par G la projection orthogonale de M sur le grand axe de (E), par K la projection du foyer F sur la tangente en M à l'ellipse, par S le point où cette tangente coupe le grand axe et par H la projection orthogonale de K sur le grand axe.

1. Soit N le point de HK satisfaisant à

$$\frac{\overline{\text{HN}}}{\overline{\text{HK}}}=\lambda,$$

où λ est une constante donnée ; trouver le lieu de N quand M décrit l'ellipse (E) et construire la tangente en N à ce lieu.
2. Montrer que, dans le cas où $\lambda = \frac{b}{a}$, la droite conjuguée de SN par rapport aux deux tangentes issues de S à l'ellipse (E) est tangente au cercle (C).
3. Montrer que le cercle (Γ) passant par les trois points G, S, M est orthogonal au cercle (C).
4. Soit Q le point où l'axe radical de ces deux cercles rencontre le grand axe de (E) ; soient u l'abscisse de Q et v l'abscisse du centre de (Γ).
Montrer que $uv = a^2$.
(Démonstrations algébrique et géométrique.)