Albert Einstein passe le bac

Sa jeunesse

C'est près d'Ulm qu'Albert Einstein voit le jour le 14 mars 1879 dans une famille d'industriels (compagnie des eaux et du gaz, puis électricité près de Munich). À trois ans il ne parle pas encore et on craint qu'il soit arriéré. C'est un caractériel : colères noires et violence. Son caractère pacifiste prend rapidement le dessus. Sa scolarité reste imperméable à l'apprentissage par cœur et il s'éprend vite des mathématiques attiré par la démonstration à travers la nécessité de démontrer : preuve et logique.

Il a quinze ans lorsque sa famille doit s'installer en Italie suite à la faillite de l'entreprise familiale. Albert ne peut quitter le territoire allemand avant d'avoir effectuer son service national. Commence alors le « cauchemar du lycée » où il est interne et déprime. Son professeur de mathématiques atteste de son bon niveau, ce qui lui permet de quitter l'Allemagne. Il échoue au concours à l'École Polytechnique de Zürich. Les enseignants, impressionnés par ses capacités, lui propose de suivre les cours en auditeur libre. Il passe son baccalauréat et intègre ensuite l'école sur titre.

Le baccalauréat

Aux deux épreuves de mathématiques, il obtient 6, la note maximale. Physique : 5 - 6 ; Chimie, sciences naturelles : 5.5 ; Allemand : 5 ; Français : 3 - 4

Épreuve de géométrie

Durée : 4 heures

(pour Albert Einstein l'épreuve s'est déroulée le 19 septembre 1896, de 7 h à 11 h)

Rappelons qu'à cette époque, faute de calculatrice électronique, les candidats ne disposaient que d'une table de logarithme pour effectuer les calculs demandés.

Premier exercice :

Un triangle inscrit dans un cercle de rayon $r = 10$, a ses hauteurs proportionnelles à 2, 3 et 4. Calculer les angles et un côté.

Second exercice :

On donne un cercle de rayon r dont le centre se trouve à l'origine O d'un repère orthonormal. On considère les cordes de ce cercle perpendiculaires à l'axe des x. Les cercles ayant ces cordes comme diamètres, sont tangents à l'ellipse de demi-axe $r\sqrt{2}$ et r aussi longtemps que la distance p de leur centre à O ne dépasse pas une certaine valeur maximale. Démontrer cette proposition et déterminer la valeur maximale de p.

Épreuve d'algèbre

Durée : 2 heures
(pour Albert Einstein l'épreuve s'est déroulée le 21 septembre 1896, de 9 h 30 à 11 h 30)

Exercice :

Dans un triangle on connaît les distances l, m, n du centre du cercle inscrit aux sommets ; déterminer le rayon ρ du cercle inscrit lorsque $l = 1$, $m = \dfrac{1}{2}$, $n = \dfrac{1}{3}$.

Solutions d'Albert Einstein :

Premier exercice de géométrie :

Rappel de l'énoncé :

Un triangle inscrit dans un cercle de rayon $r = 10$, a ses hauteurs proportionnelles à 2, 3 et 4. Calculer les angles et un côté.

Solution d'Albert Einstein :

Comme les côtés d'un triangle sont inversement proportionnels aux hauteurs relatives, on a :

$$a = \frac{1}{h_a}k = \frac{1}{2}k \; ; \; b = \frac{1}{h_b}k = \frac{1}{3}k \; : \; c = \frac{1}{h_c}k = \frac{1}{4}k.$$

Comme la détermination des angles ne dépend que du rapport des côtés, nous pouvons tirer la résolution la plus pratique de la similitude avec les Δ de côtés 6, 4 et 3.

$$\cos\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-36+16+9}{24} \qquad \cos\alpha = -\frac{11}{24} \qquad \sin(\alpha - 90^o) = 0,4583$$

$\log\sin(\alpha - 90^o) = 9,66115 - 10 \qquad \alpha - 90^o = 27^o\ 16'\ 22''$

(Note : Einstein n'a pas mis la valeur de α ; le correcteur a ajouté « $\alpha = 117^o\ 16'\ 22''$ »)

$$\cos\beta = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{29}{36} = 0,8055 \qquad \log\cos\beta = 9,9061 - 10 \qquad \beta = 36^o\ 20'$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{43}{48} \qquad \log\cos\gamma = 9,95226 - 10 \qquad \gamma = 26^o\ 23'$$

Calcul du côté a
Comme α est obtus, on a : $a = 2rsin(180^o - \alpha)$
$\log a = \log\sin(64^o\ 43'\ 38'')$
$= 1,30103 + 9,94884 - 10 = 1,24987$

(Note : le correcteur a marqué « Erreur dans la transcription, résultat exact. Il fallait en effet écrire 62º 43' 38" »)

$a = 17,77$

Second exercice de géométrie :

Rappel de l'énoncé :

On donne un cercle de rayon r dont le centre se trouve à l'origine O d'un repère orthonormal. On considère les cordes de ce cercle perpendiculaires à l'axe des x. Les cercles ayant ces cordes comme diamètres, sont tangents à l'ellipse de demi-axe $r\sqrt{2}$ et r aussi longtemps que la distance p de leur centre à O ne dépasse pas une certaine valeur maximale. Démontrer cette proposition et déterminer la valeur maximale de p.

Solution d'Albert Einstein :

Si nous désignons la distance du centre d'un tel cercle à l'origine par p, alors son rayon $= \sqrt{r^2 - p^2}$. Son équation est :

$$(x-p)^2 + y^2 = r^2 - p^2$$
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = r^2 - p^2$$
$$x^2 - 2px + y^2 = r^2 - 2p^2$$

Nous cherchons alors l'équation de l'enveloppe, c'est-à-dire l'intersection de deux tels cercles dont les p diffèrent d'une valeur infiniment petite. Pour le point d'intersection, l'accroissement de x et y qui découle de l'accroissement infiniment petit $\mathrm{d}(p)$ doit entraîner une équation identique à 0. Donc :

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 - 2px + p^2 + y^2 - r^2 + p^2 & = & 0 \\ & x^2 - 2px + p^2 + y^2 - r^2 + p^2 + (-2x+4p)\mathrm{d}p & = & 0 \\ \hline \text{en soustrayant :} & 4p - 2x & = & 0 \end{array}$$

Et en remplaçant dans la première équation :

$$\begin{aligned} x^2-2px+p^2+y^2-r^2+p^2&=0\\ x^2-2px+p^2+y^2-r^2+\frac{1}{2}x^2&=0\\ \frac{1}{2}x^2+y^2&=r^2 \end{aligned}$$

Pour $x=0$, $y=\pm r$ et pour $y=0$, $x=\pm r\sqrt{2}$.
Nous devons maintenant encore examiner la condition pour laquelle un cercle du système est tangent à l'ellipse $\frac{1}{2}x^2+y^2=r^2$

~~Comme dans les deux figures (cercle du système et ellipse) la plus grande valeur de x correspond à l'ordonnée 0 et que le centre de tous les cercles se trouve à l'intérieur de l'ellipse nous n'avons besoin que de vérifier si, pour $y=0$, l'un des deux points du cercle est situé en dehors de l'ellipse. Comme la totalité de la figure à vérifier est symétrique par rapport à l'axe des y, nous n'avons à considérer que l'un des côtés (positif).~~

Il faut comparer directement les deux équations du cercle et de l'ellipse, et identifier les x et les y des deux équations
Ellipse $\frac{1}{2}x^2+y^2=r^2$
Cercle $x^2-2px+y^2-r^2+2p^2=0$

~~En éliminant y :~~

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{1}{2}x^2-2px+r^2-\frac{1}{2}x^2-r^2+2p^2} &\cancel{=} \cancel{0}\\ \cancel{x^2-4px+4p^2} &\cancel{=} \cancel{-4p^2+4p^2} \end{aligned}$$

~~L'expression $\sqrt{-4p^2+4p^2}$~~

$$x=2p$$

(Note : on ne connaît pas les raisons pour lesquelles ce qui précède est barré, bien que la dernière relation soit utilisée dans la suite ; l'examinateur a simplement commenté par le mot « exact ».)
remplacé dans I

$$\begin{aligned} 2p^2+y^2&=r^2\\ y&=\pm\sqrt{r^2-2p^2} \end{aligned}$$

Pour que la racine soit réelle, il faut $r^2<2p^2$
(Note : l'inégalité est fausse sans que le correcteur ne le signale, mais les inégalités suivantes sont correctes.)

$$p\sqrt{2}<r;\qquad p<\frac{r}{\sqrt{2}}$$

Lorsque $p\geqslant\frac{r}{\sqrt{2}}$ alors il n'y a plus tangence avec l'ellipse.

Exercice d'algèbre :

Rappel de l'énoncé :

Dans un triangle on connaît les distances l, m, n du centre du cercle inscrit aux sommets ; déterminer le rayon ρ du cercle inscrit lorsque $l=1$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$.

Solution d'Albert Einstein :

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{l} = \rho \quad ; \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\rho}{m} = 2\rho \quad ; \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{n} = 3\rho.$$

Comme dans tout Δ on a la relation

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1$$

En introduisant les valeurs ci-dessus on obtient l'équation :

$$\begin{array}{lrcl} & 14\rho^2 + 12\rho^3 - 1 & = & 0 \quad ; \quad \rho = \dfrac{1}{x} \\ & \dfrac{14}{x^2} + \dfrac{12}{x^3} - 1 & = & 0 \\ & 14x + 12 - x^3 & = & 0 \\ \text{ou} & x^3 - 14x - 12 & = & 0 \end{array}$$

Nous pouvons alors appliquer la formule de Cardan :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

où $p = -14$, $q = -12$

Le discriminant $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ est négatif, de sorte que ses racines sont **irrationnelles**.

(Note : Einstein aurait dû écrire ***imaginaires*** *ou* ***complexes****.)*

On peut donc appliquer la méthode trigonométrique avec

$$\begin{array}{rcl} \cos u & = & \dfrac{-\dfrac{q}{2}}{\sqrt{\left(-\dfrac{p}{3}\right)^3}} \\ \log(\cos u) & = & \log 6 + \dfrac{3}{2}\log 3 - \dfrac{3}{2}\log 14 \\ & = & 0,77815 + 0,71568 - 1,71919 \\ & = & 0,77474 - 10 \\ u & = & 53^\circ\ 28'\ 4'' \end{array}$$

Les trois racines s'écrivent :

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} \times \cos\frac{u}{3}$$
$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} \times \cos\left(\frac{u}{3} + 120^\circ\right)$$
$$2\sqrt{-\frac{p}{3}} \times \cos\left(\frac{u}{3} - 120^\circ\right)$$

Pour le problème seules les racines positives sont utiles. Comme $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ est positif, l'autre facteur doit être aussi positif, pour que le produit soit positif. $\frac{u}{3}$ est un angle aigu, donc son cosinus est positif, donc la première racine convient. Le cosinus du second angle (situé dans le second quadrant) est négatif, donc la racine ne convient pas. Le cosinus du troisième $\frac{u}{3} + 240^\circ$ est plus petit que 260°, donc encore dans le troisième quadrant, donc la troisième racine ne convient pas.

(Note : le correcteur a écrit la bonne réponse par-dessus 260°, soit 270°.)

$$\log x = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{14}{3} + \log\cos 17^\circ\ 49'\ 21''$$
$$\log x = 0,61420 \qquad \log 10\rho = 0,38580$$
$$\rho = 0,243$$

Quelques précisions

Pour le premier exercice de géométrie

Einstein utilise la similitude pour faire son raisonnement avec un triangle de hauteurs connues. Il suffit cependant de remplacer les valeurs de a, b et c exprimées en fonction de k pour obtenir le même résultat par simplification par k^2.

Pour le second exercice de géométrie

L'équation du cercle $\mathcal{C}_p$ de paramètre p est :

$$(x-p)^2 + y^2 = r^2 - p^2$$

en dérivant par rapport à p on obtient l'équation : $-2(x-p) = -2p$, soit $x = 2p$, ce qui donne l'équation le courbe enveloppe sachant que x est l'abscisse du point de contact du cercle $\mathcal{C}_p$ avec la courbe enveloppe.

On calcule alors y à partir de l'équation de $\mathcal{C}_p$ et on obtient les équations paramétriques de la courbe enveloppe :

$$\begin{cases} x = 2p \\ y = \pm\sqrt{r^2 - 2p^2} \end{cases}$$

avec $-\dfrac{r}{\sqrt{2}} \leqslant p \leqslant \dfrac{r}{\sqrt{2}}$,

puis en éliminant le paramètre $p = \dfrac{x}{2}$, l'équation de l'ellipse de demi-axes $r\sqrt{2}$ et r :

$$\left(\frac{x}{r\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Remarques : l'ellipse est entièrement décrite pour $-r/\sqrt{2} \leqslant p \leqslant r/\sqrt{2}$
pour $-r \leqslant p \leqslant -r/\sqrt{2}$ ou $r/\sqrt{2} \leqslant p \leqslant r$ il n'y a plus tangence avec l'ellipse.

Montrons que pour ces dernières valeurs de p il n'y a effectivement plus contact entre les cercles $\mathcal{C}_p$ et l'ellipse. L'abscisse maximale d'un point de $\mathcal{C}_p$ est $p + \sqrt{r^2 - p^2}$ pour $0 \leqslant p \leqslant r$ (le problème étant symétrique on limite l'étude à $0 \leqslant p \leqslant r$).

La dérivée de cette fonction est $\dfrac{\sqrt{r^2 - p^2} - p}{\sqrt{r^2 - p^2}}$, strictement positive sur $[0, r/\sqrt{2}[$, nulle en $r/\sqrt{2}$ et strictement négative sur $]r/\sqrt{2}, r]$.
Ceci montre que le maximum est $r\sqrt{2}$ atteint en $p = r/\sqrt{2}$ et que le cercle $\mathcal{C}_p$ n'est plus jamais tangent à l'ellipse pour $p \geqslant r/\sqrt{2}$ puisque la distance décroît, alors que p croît, le rayon du cercle $\mathcal{C}_p$ étant toujours décroissant.

Pour l'exercice d'algèbre

Si les mesures des angles α, β et γ au sommets du triangle respectivement distants de 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$ du centre du cercle inscrit de rayon ρ, on peut écrire :

$$\rho = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}\sin\frac{\gamma}{2}$$

d'où $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \rho$, $\sin\dfrac{\beta}{2} = 2\rho$ et $\sin\dfrac{\gamma}{2} = 3\rho$
or $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, d'où $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}\right)$ et par suite $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos\left(\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}\right)$
en remplaçant on obtient alors :

$$\rho = \sqrt{1 - 4\rho^2}\sqrt{1 - 9\rho^2} - 6\rho^2$$

soit $(6\rho^2 + \rho)^2 = (1 - 4\rho^2)(1 - 9\rho^2)$, puis $12\rho^3 + 14\rho^2 - 1 = 0$
L'étude de $f(\rho) = 12\rho^3 + 14\rho^2 - 1$ de dérivée $f'(\rho) = 36\rho^2 + 28\rho$ s'annulant en 0 et $-\dfrac{7}{9}$, montre qu'il y a trois racines réelles, dont une seule positive ($f(-\frac{7}{9}) = \frac{686}{243}$ et $f(0) = -1$).
$f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16}$ et $f'\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{37}{4}$, donc l'équation de la tangente en $x = \dfrac{1}{4}$ est $y - \dfrac{1}{16} = \dfrac{37}{4}\left(x - \dfrac{1}{4}\right)$,
qui coupe l'axe des abscisses en $x = \dfrac{9}{37} \approx 0,243$.