∾ Entrée École de santé des armées 29 mars 2021 ∾

Durée : 1 heure 30 minutes   Coefficient : 2

Avertissement

L'utilisation de calculatrice, règle de calcul, formulaire, papier millimétré, téléphone portable n'est pas autorisée.

- Le candidat traitera les trois exercices ;
- Les réponses des exercices 1 et 2 seront données sur la grille prévue à cet effet ;
- L'exercice 3 sera traité sur une copie à part ;
- La qualité de la présentation des copies et de l'orthographe sera prise en compte dans l'évaluation ;
- Le candidat vérifiera que le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1. **6 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, 8, C ou D est exacte.
On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte en **cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.
Toute réponse juste est comptée + 1 point, toute réponse fausse est comptée −0,25 point. Une absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

QCM 1

L'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$3[\ln(x)]^2 + 2\ln(x) - 5 = 0.$$

est :

A. $\left\{1\ ;\ -\frac{5}{3}\right\}$; **B.** $\left\{\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right\}$. **C.** $\left\{\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right\}$. **D.** $\{\mathrm{e}\}$

QCM 2

Les solutions réelles de l'inéquation $(\mathrm{e}^{x} - 1)(1 - x) \geqslant 0$ sont :

A. $]-\infty\ ;\ 1]$; **B.** $[0\ ;\ 1]$. **C.** $[0\ ;\ +\infty[$. **D.** $]-\infty\ ;\ 0[\cup]1\ ;+\infty[$

QCM 3

Les solutions réelles de l'inéquation $\ln(-x+5) < \ln(x+1)$ sont :

A. $]2\,;\,+\infty[$; **B.** $]-\infty\,;\,5[$. **C.** $]-1\,;\,5[$. **D.** $]2\,;\,5[$

QCM 4

La limite de $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ en plus l'infini est :

A. $+\infty$; **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2

QCM 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{\left(x^2-1\right)},$$

alors :

A. $f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$; **B.** $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$

C. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2-1}$. **D.** $f'(x) = 2x^2\mathrm{e}^{x^2-1}$

QCM 6

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A. -2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** π

Indication : calculer la dérivée de $h(x) = x\sin x + \cos x$.

Exercice 2 **6 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exacte.

On demande au candidat d'indiquer **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte **en cochant la case sur la grille prévue à cet effet**.

Toute réponse juste est comptée + 1 point, toute réponse fausse est comptée $-0,25$ point. Une absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour les **QCM 7** et **8**, on considère une population dont 5 % est touchée par une maladie.

QCM 7

On considère de manière aléatoire et indépendante deux personnes de cette population.

Soit l'évènement A : « aucune personne n'est malade ».

La probabilité de A est égale à :

A. 0,9025 **B.** 0,0025 **C.** 0,9975 **D.** 0,1

QCM 8

On sait que la probabilité qu'une personne ait un test positif à cette maladie, sachant qu'elle est malade, est 0,8. D'autre part, la probabilité d'avoir un test positif pour une personne de cette population est 0,1.

La probabilité que la personne soit malade sachant qu'elle a un test positif est égale à :

A. 0,8 **B.** 0,01 **C.** 0,4 **D.** 0,04

QCM 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 3x - 1$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

A. $y = 5x - 1$ **B.** $y = 5x$ **C.** $y = 4x$ **D.** $y = 5x + 3$

QCM 10

Soit la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1,5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

A. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

B. La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ est géométrique.

C. La suite (u_n) est majorée.

D. La suite (u_n) est décroissante.

QCM 11

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n + 1$.

A. La suite converge vers 1.

B. La suite diverge vers plus l'infini.

C. La suite converge vers zéro.

D. La suite diverge vers moins l'infini.

QCM 12

La solution y de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ vérifiant $y(0) = -1$ est définie par :

A. $y(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2$.

B. $y(x) = \mathrm{e}^{0,5x} - 3$.

C. $y(x) = 2\mathrm{e}^{0,5x} - 3$.

D. $y(x) = \mathrm{e}^{2x-3}$.

Exercice 3 **8 points**

Un virus sévit dans une population. Un test (gold standard) permet de dire avec certitude si un individu est malade ou non.

Mais il est coûteux et invasif. Dans la pratique, on met en place un test sérologique, dont les indicateurs caractéristiques – la sensibilité et la spécificité – sont définis ci-après.

On prélève un individu au hasard dans la population et on considère les évènements :

M : « l'individu est malade » ;

NM : « l'individu n'est pas malade » ;

$T+$: « le test est positif » ;

T− : « le test est négatif ».

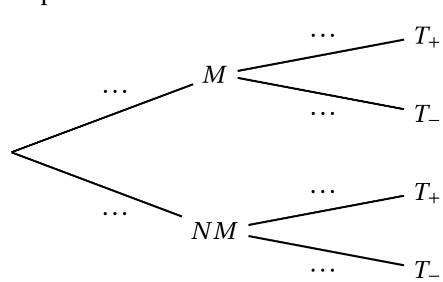
On note : p la probabilité que l'individu soit malade, on l'appelle la prévalence de la maladie ;

$S_e = P_M(T_+)$ la sensibilité du test ;

$S_p = P_{NM}(T_-)$ la spécificité du test.

1. Quelques calculs

Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. On appelle valeur prédictive positive du test le nombre $VPP = P_{T+}(M)$.

Montrer que $VPP = \dfrac{S_e p}{S_e p + (1-p)\left(1 - S_p\right)}$.

3. On suppose dans cette question, que la prévalence est de 30 %, que la sensibilité du test est de 90 % et que la spécificité du test est de 90 %.

a. Calculer la VPP du test sérologique.

b. Le test a t-il un intérêt ?

c. Quel problème se pose-t-il en cas de maladie rare ?

4. Dans cette question, on suppose que la prévalence est de 1 %, que la sensibilité du test est de 90 % et que la spécificité du test est de 90 %.

a. Calculer la VPP du test sérologique.

b. Le test a t-il un intérêt ?

c. Quel problème se pose en cas de maladie rare ?

5. La VPP d'un test sérologique n'est pas toujours un indicateur satisfaisant. On s'intéresse alors à un autre indicateur, le ratio de vraisemblance positif du test, défini par :

$$RV+ = \frac{P_M(T_+)}{P_{NM}(T_+)}.$$

a. Exprimer $RV+$ en fonction des indicateurs du test.

b. Calculer le $RV+$ avec les données de la question 3 puis celles de la question 4.

c. On admet que plus le $RV+$ est grand, plus la VPP est grande.

D'après la question précédente, le RV+ est-il suffisant pour conclure + la fiabilité du test ?

Si on a plusieurs tests possibles, comment choisir S_e et S_p pour avoir le test le plus significatif ?

Le gain diagnostique est important quand le RV+ est compris entre 5 et 10. S_e et S_p doivent donc être grands.

6. En situation clinique

Le médecin cherche surtout à ne pas « passer à côté d'une maladie » et accepte « d'alerter à tort » un patient.

Il abaisse le seuil de positivité du test. Quelle est la conséquence :

a. Sur S_e et S_p ?

b. Sur le nombre de de « faux positifs » ?

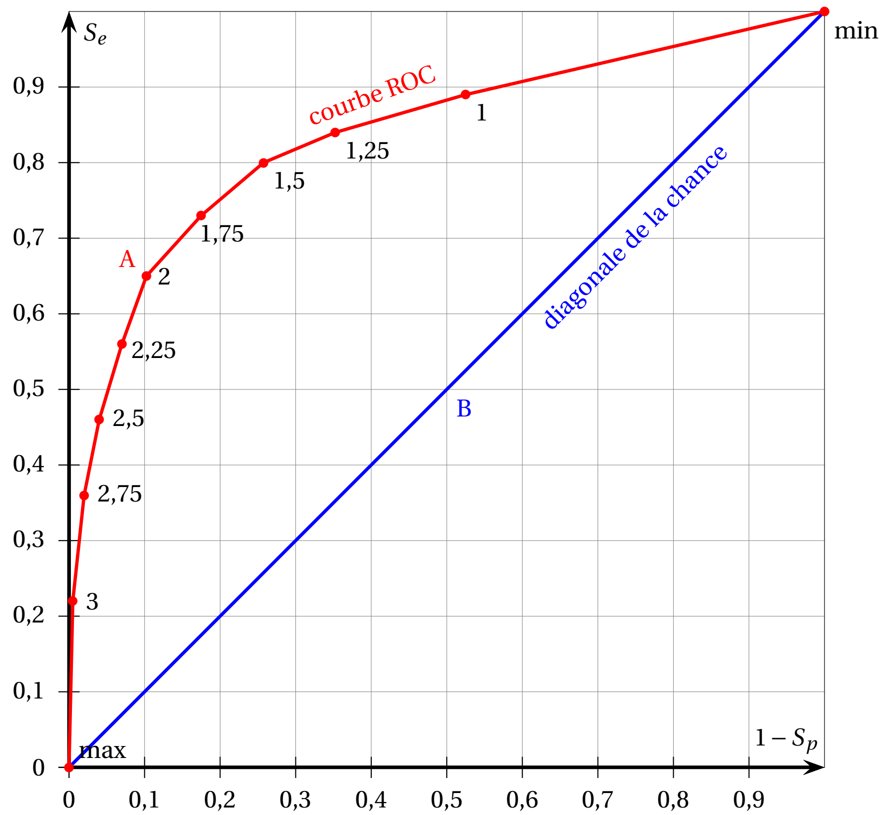
7. La courbe ROC

On vient de voir que l'on pouvait agir sur le seuil de positivité du test.

Lors du dépistage de la trisomie 21, le test consiste à mesurer l'indicateur HCG.

On donne le tableau suivant :

Seuil	S_p	$1-S_p$	S_e
Max	1	0	0
3	0,995	0,005	0,22
2,75	0,98	0,02	0,36
2,5	0,96	0,04	0,46
2,25	0,93	0,07	0,56
2	0,897 5	0,102 5	0,65
1,75	0,825	0,175	0,73
1,5	0,742 5	0,257 5	0,8
1,25	0,647 5	0,352 5	0,84
1	0,475	0,525	0,89
Min	0	1	1



a. Pour un seuil de sensibilité 2 correspondant au point A :

i. Que vaut $RV+$ à 10^{-2} près.

ii. Interpréter graphiquement cette valeur.

b. Pour le point B du graphique.

i. Que vaut $RV+$?

ii. Que dire de ce test sérologique ?

c. À quel point du graphique correspond le test parfait ?

d. La capacité diagnostique d'un test peut être quantifiée par l'aire sous la courbe ROC.

i. Que vaut cette aire quand le test n'a pas d'intérêt ?

ii. Que vaut cette aire quand le test est parfait ?

iii. Comment doit être cette aire pour que le test soit le meilleur possible ?