

∞ Espagne Portugal juin 1962 ∞

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

A, B, C étant les angles d'un triangle, on pose

$$4y = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

Mettre y sous la forme d'un produit de sinus.

II

Soient a et b deux entiers positifs vérifiant

$$(a + 4)(b + 5) = 1962.$$

Calculer les différents couples de valeurs de a et b ; trouver la plus petite valeur prise par la somme $a + b$.

III

On donne un carré ABCD, de centre O.

Un point variable, M, décrit le segment AC (diagonale du carré). On projette orthogonalement M en P sur AB et en Q sur BC.

1. Déterminer avec précision le lieu du milieu de PQ.
2. Montrer que la médiatrice de PQ passe par un point fixe.
3. Déterminer avec précision l'enveloppe de PQ.
Construire le point de contact, T, de PQ avec son enveloppe; montrer que, si les droites AC et PQ se coupent en un point H, la division (PQRT) est harmonique.
4. Montrer que, dans le triangle MPQ, la hauteur issue de M passe par un point fixe.
5. En fonction de la longueur $BM = x$ calculer, dans le triangle OPQ, les longueurs des rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits.