∽ Baccalauréat C Espagne juin 1986 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$\text{(E)}\qquad (1+\mathrm{i}z)^3(1-\mathrm{i}\tan\alpha) = (1-\mathrm{i}z)^3(1+\mathrm{i}\tan\alpha).$$

1. Soit z une solution de (E).

a. Montrer que $|1+\mathrm{i}z| = |1-\mathrm{i}z|$.

b. En déduire que z est réel.

2. a. Exprimer $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{1-\mathrm{i}\tan\alpha}$ en fonction de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

b. Soit z un nombre réel ; on pose $z = \tan\varphi$ où $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.
Écrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c. Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit A et A′ deux points distincts du plan, Δ et Δ' les droites perpendiculaires à la droite (AA′), respectivement en A et A′, et O le milieu de [AA′]. On pose OA = r.
Pour tout point F du segment [AA′], distinct de A et de A′, on note P la parabole de foyer F et de sommet A, P′ la parabole de foyer F et de sommet A′, D la directrice de P et D′ la directrice de P′.

1. Dans cette question F est fixé et on suppose donné un point commun à P et P′.

a. Placer les éléments géométriques précédents sur une figure.

b. Soit H et H′ les projections orthogonales de M sur D et D′.
Prouver que le cercle C de centre M passant par F est tangent à D et D′ aux points H et H′ et que MF = $2r$.
Prouver que droites (FH) et (FH′) sont orthogonales ; en déduire que les tangentes à P et P′ au point M sont orthogonales.

c. Prouver que I milieu de [FM] appartient à la médiatrice de [AA′] et que $\text{OF}^2 + \text{OI}^2 = r^2$. (On pourra utiliser l'homothétie h de centre F et de rapport 1/2.)

2. On suppose maintenant que F parcourt le segment [AA′].

a. Prouver que P et P′ se coupent en deux points M_1 et M_2 symétriques par rapport à la droite (AA′) et indiquer comment on peut construire ces points.

b. À l'aide de 1. c. déterminer le lieu géométrique des milieux I_1 et I_2 de $[\text{FM}_1]$ et $[\text{FM}_2]$.

c. En employant un repère cartésien convenablement choisi, déterminer le lieu géométrique E des points M_1 et M_2 et placer E sur la figure.
N.B.- On admettra le théorème suivant : Théorème. (admis).
Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D) ; soit M un point de P et H sa projection orthogonale sur D ; la tangente en M à P est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\text{HMF}}$.

PROBLÈME **11 POINTS**

Pour tout entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité 2 cm).

1. **a.** Calculer la dérivée de f_n et préciser la valeur de $f_n'(0)$ lorsque $n = 1$ puis lorsque $n > 2$. Dresser le tableau de variations de f_n pour $n = 1$, n pair, n impair supérieur à 1.

   b. Montrer que, pour tout n et pour tout x de $[0~;~+\infty[$,

$$f_n(x) \leqslant f_n(n) = n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

   c. Représenter sur une même figure $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

2. Pour tout réel $X \geqslant 0$, on pose

$$F_n(X) = \int_0^X f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Déterminer des nombres réels a_0, $a_1, \cdots, a_n$ tels que la fonction :

$$G_n : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right)$$

   soit une primitive de la fonction f_n sur $[0~;~+\infty[$.

   b. En déduire l'expression de $F_n(X)$ en fonction de X et de n.

   c. L'entier n étant donné, montrer que $F_n(X)$ admet une limite I_n lorsque X tend vers $+\infty$ et que $I_n = n!$.

3. On se propose d'encadrer I_n par une méthode directe, indépendante des résultats du 2.

   a. Á l'aide du 1. b., montrer que

$$\int_0^{2n} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2n n^n \mathrm{e}^{-n}.$$

   b. Montrer que, si $x \geqslant 2n$,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \leqslant n^n \mathrm{e}^{-n}, \text{ et que } f_n(x) \leqslant (2n)^n \mathrm{e}^{-n} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

   En déduire que, si $X \geqslant 2n$,

$$\int_{2n}^X x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2(2n)^n \mathrm{e}^{-2n}.$$

   c. Á l'aide de 3. a. et 3. b., majorer $F_n(X)$ lorsque $X \geqslant 2n$.

   En déduire que $I_n \leqslant 2n^n \mathrm{e}^{-n}\left[n + \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n\right]$.

   d. Montrer, d'autre part, que

$$(n+1)^n \mathrm{e}^{-n-1} \leqslant \int_n^{n+1} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n.$$

4. Déduire de 3. c. et 3. d. un encadrement de

$$u_n = \frac{\ln I_n - n \ln n}{n}$$

   et déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.