

## Baccalauréat C Espagne juin 1986

### EXERCICE 1

4 POINTS

Soit  $\alpha$  un nombre réel appartenant à  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

On considère l'équation d'inconnue complexe  $z$  :

$$(E) \quad (1 + iz)^3(1 - i \tan \alpha) = (1 - iz)^3(1 + i \tan \alpha).$$

1. Soit  $z$  une solution de (E).
  - a. Montrer que  $|1 + iz| = |1 - iz|$ .
  - b. En déduire que  $z$  est réel.
2. a. Exprimer  $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$  en fonction de  $e^{i\alpha}$ .
  - b. Soit  $z$  un nombre réel; on pose  $z = \tan \varphi$  où  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .  
Écrire l'équation portant sur  $\varphi$  traduisant (E) et la résoudre.
  - c. Déterminer les solutions  $z_1, z_2, z_3$  de (E).

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit  $A$  et  $A'$  deux points distincts du plan,  $\Delta$  et  $\Delta'$  les droites perpendiculaires à la droite  $(AA')$ , respectivement en  $A$  et  $A'$ , et  $O$  le milieu de  $[AA']$ . On pose  $OA = r$ .

Pour tout point  $F$  du segment  $[AA']$ , distinct de  $A$  et de  $A'$ , on note  $P$  la parabole de foyer  $F$  et de sommet  $A$ ,  $P'$  la parabole de foyer  $F$  et de sommet  $A'$ ,  $D$  la directrice de  $P$  et  $D'$  la directrice de  $P'$ .

1. Dans cette question  $F$  est fixé et on suppose donné un point commun à  $P$  et  $P'$ .
  - a. Placer les éléments géométriques précédents sur une figure.
  - b. Soit  $H$  et  $H'$  les projections orthogonales de  $M$  sur  $D$  et  $D'$ .  
Prouver que le cercle  $C$  de centre  $M$  passant par  $F$  est tangent à  $D$  et  $D'$  aux points  $H$  et  $H'$  et que  $MF = 2r$ .  
Prouver que droites  $(FH)$  et  $(FH')$  sont orthogonales; en déduire que les tangentes à  $P$  et  $P'$  au point  $M$  sont orthogonales.
  - c. Prouver que  $I$  milieu de  $[FM]$  appartient à la médiatrice de  $[AA']$  et que  $OF^2 + OI^2 = r^2$ . (On pourra utiliser l'homothétie  $h$  de centre  $F$  et de rapport  $1/2$ .)
2. On suppose maintenant que  $F$  parcourt le segment  $[AA']$ .
  - a. Prouver que  $P$  et  $P'$  se coupent en deux points  $M_1$  et  $M_2$  symétriques par rapport à la droite  $(AA')$  et indiquer comment on peut construire ces points.
  - b. À l'aide de 1. c. déterminer le lieu géométrique des milieux  $I_1$  et  $I_2$  de  $[FM_1]$  et  $[FM_2]$ .

- c. En employant un repère cartésien convenablement choisi, déterminer le lieu géométrique E des points  $M_1$  et  $M_2$  et placer E sur la figure.

**N. B.**- On admettra le théorème suivant :

Théorème (admis).

Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D); soit M un point de P et H sa projection orthogonale sur D; la tangente en M à P est la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{HMF}$ .

**PROBLÈME**

**11 POINTS**

Pour tout entier naturel non nul, soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On appelle  $(\mathcal{C}_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan P rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2 cm).

1. a. Calculer la dérivée de  $f_n$  et préciser la valeur de  $f'_n(0)$  lorsque  $n = 1$  puis lorsque  $n > 2$ . Dresser le tableau de variations de  $f_n$  pour  $n = 1$ ,  $n$  pair,  $n$  impair supérieur à 1.
- b. Montrer que, pour tout  $n$  et pour tout  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,

$$f_n(x) \leq f_n(n) = n^n e^{-n}.$$

- c. Représenter sur une même figure  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ .
2. Pour tout réel  $X \geq 0$ , on pose

$$F_n(X) = \int_0^X f_n(x) dx.$$

- a. Déterminer des nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que la fonction :

$$G_n : x \mapsto e^{-x} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)$$

soit une primitive de la fonction  $f_n$  sur  $[0; +\infty[$ .

- b. En déduire l'expression de  $F_n(X)$  en fonction de  $X$  et de  $n$ .
- c. L'entier  $n$  étant donné, montrer que  $F_n(X)$  admet une limite  $I_n$  lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$  et que  $I_n = n!$ .
3. On se propose d'encadrer  $I_n$  par une méthode directe, indépendante des résultats du 2.
  - a. Á l'aide du 1. b., montrer que

$$\int_0^{2n} x^n e^{-x} dx \leq 2n n^n e^{-n}.$$

**b.** Montrer que, si  $x \geq 2n$ ,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} \leq n^n e^{-n}, \text{ et que } f_n(x) \leq (2n)^n e^{-n} e^{-\frac{x}{2}}$$

En déduire que, si  $X \geq 2n$ ,

$$\int_{2n}^X x^n e^{-x} dx \leq 2(2n)^n e^{-2n}.$$

**c.** À l'aide de 3. a. et 3. b., majorer  $F_n(X)$  lorsque  $X \geq 2n$ .

En déduire que  $I_n \leq 2n^n e^{-n} \left[ n + \left(\frac{2}{e}\right)^n \right]$ .

**d.** Montrer, d'autre part, que

$$(n+1)^n e^{-n-1} \leq \int_n^{n+1} x^n e^{-x} dx \leq I_n.$$

**4.** Déduire de 3. c. et 3. d. un encadrement de

$$u_n = \frac{\ln I_n - n \ln n}{n}$$

et déterminer la limite de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .