

∞ Baccalauréat C Espagne¹ juin 1987 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on associe au point m d'affixe $z (z \neq 2i)$ le point M d'affixe Z , défini par

$$Z = \frac{z - 3 + i}{2i - z}.$$

1. Déterminer et construire l'ensemble des points m tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points m pour lesquels $3n$:

$$\arg Z = \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

3. Déterminer et construire l'ensemble des points m pour lesquels

$$|Z| = 2.$$

Toutes ces questions peuvent être traitées géométriquement en utilisant les points A d'affixe $2i$ et B d'affixe $3 - i$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan orienté, on trace un triangle ABC non isocèle et tel que

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Soit d_1 la demi-droite d'origine B contenant A.

Soit d_2 la demi-droite d'origine C contenant A.

On place sur d_1 un point P différent de B et sur d_2 un point Q différent de C, tels que $BP = CQ$.

1. Justifier l'existence d'une unique rotation r transformant B en C et P en Q.
Préciser l'angle de r . Construire le centre O de r et prouver que ce point est indépendant de P et Q.
2. Quelle est la nature du triangle OPQ?
3. Construire les points P sur d_1 et Q sur d_2 sachant que $BP = CQ = PQ$.

PROBLÈME

12 POINTS

Ce problème a pour buts, d'une part d'étudier la suite $\frac{n^n e^{-n}}{n!}$, d'autre part de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.

Pour tout entier $n > 0$, on note f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

1. Espagne, Amérique centrale

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

On appelle \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 10$ cm.

Partie A

1. Déterminer le tableau de variations de f_n sur $[0; +\infty[$.
2. Pour tout entier $n \geq 2$, étudier la position relative de \mathcal{C}_n et de \mathcal{C}_{n+1} et vérifier que le point A_n de coordonnées $(n; f_n(n))$ appartient à \mathcal{C}_{n-1} .
3. Construire avec soin, sur un même graphique, les courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes.

Partie B

Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = f_n(n)$.

1.
 - a. En utilisant les résultats du A, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - b. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

On se propose, dans les questions suivantes, de déterminer la limite de cette suite.
2.
 - a. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

En utilisant les variations de g , démontrer que pour tout t de $[0; 1]$ on a

$$\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{4}.$$

- b. En déduire que pour tout entier $n > 0$ on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1 - \frac{1}{4n}}.$$

3.
 - a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}.$$

- b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4}(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1)}.$$

4. a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}.$$

(On pourra utiliser des considérations d'aire.)

- b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$u_n \leq e^{-1 - \frac{1}{4} \ln n}.$$

- c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie C

Pour tout entier $n > 0$ et pour tout réel a positif ou nul, fixé, on pose

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt.$$

- Calculer $I_n(a)$.
- Démontrer que pour tout entier $n > 0$ et tout réel t positif ou nul, on a

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}.$$

En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

- a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n!} \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

(On pourra utiliser B 1. a.)

- b. Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.
- a. Établir pour tout entier $n \geq 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
- b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$I_n(a) = 1 - e^{-a\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)}.$$

Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$?

- Démontrer que pour tout a de $[0; +\infty[$ on a

$$e^a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right).$$