∽ Baccalauréat C Espagne juin 1989 ∾

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en Z :

$$Z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)Z-\sqrt{3}=0.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations en z :

$$\begin{array}{lrcl}(1) & z+\dfrac{1}{z} & = & -1\\ (2) & z+\dfrac{1}{z} & = & \sqrt{3}\end{array}$$

   On désigne par α et α' les solutions de l'équation (1), par β et β' celles de l'équation (2).

3. Soit

$$f(z)=z^4+\left(1-\sqrt{3}\right)z^3+\left(2-\sqrt{3}\right)z^2+\left(1-\sqrt{3}\right)z+1.$$

   Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul,

$$\frac{f(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)-\sqrt{3}.$$

4. Déduire de l'étude précédente que α, α', β, β' sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z)=0$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On pose AB $= a$, où a est un réel strictement positif; l'unité du plan étant le centimètre, on prendra $a=6$ pour la figure demandée au 3.

1. Soit m un réel différent de -2. On note G_m le barycentre du système $\{(A,\ m),\ (B,\ 1),\ (C,\ 1)\}$.
   Déterminer l'ensemble (E_1) des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$ en restant différent de -2.
2. On note G l'isobarycentre des trois points A, B, C.
   a. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que

$$MA^2+MB^2+MC^2=2a^2.$$

   b. Déterminer l'ensemble (E_3) des points M du plan tels que

$$-2MA^2+MB^2+MC^2=0.$$

3. Faire une figure où l'on représentera le triangle ABC et les ensembles (E_1), (E_2) et (E_3).

EXERCICE 2 **5 POINTS**
Enseignement de spéciamité

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées indépendamment.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

À la gare A, 16 voyageurs ont pris chacun un billet dont :
7 pour la gare B (prix du billet 50 francs)
5 pour la gare C (prix du billet 60 francs)
4 pour la gare D (prix du billet 75 francs).

1. On choisit au hasard un de ces voyageurs.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque voyageur le prix de son billet (en francs).
  a. Déterminer la loi de probabilité de X.
  b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On choisit au hasard trois de ces voyageurs.
  a. Calculer la probabilité pour que ces trois voyageurs aient trois destinations différentes.
  b. Calculer la probabilité pour qu'au moins un des voyageurs ait un billet pour la gare B.
  c. Quelle est la probabilité pour que cette destination soit B, sachant que les trois voyageurs ont la même destination.

PROBLÈME **4 POINTS**

A

On note f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\cos x}.$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
Construire son tableau de variations sur l'intervalle $[0~;~\pi]$.
Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la restriction de f à $[0~;~\pi]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ où l'unité de longueur est 5 cm.

2. On se propose de rechercher un encadrement de l'aire S, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.
  a. Étant donnés deux nombres réels u et v tels que $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant \pi$, démontrer que l'on a

$$(v-u)f(u) \leqslant \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (v-u)f(v)$$

  et interpréter géométriquement ce résultat.
  b. En utilisant le résultat précédent, établir l'encadrement suivant du nombre S :

$$\frac{\pi}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \leqslant \mathrm{S}$$
$$\leqslant \frac{\pi}{4}\left[f(0)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+f(\pi)\right]$$

  c. En déduire une valeur approchée entière, à une unité près, du nombre S.

3. On se propose de rechercher les tangentes à $(\mathscr{C})$ issues de l'origine O.
  a. Soit A le point de $(\mathscr{C})$ ayant pour abscisse a. Écrire une équation de la tangente en A à $(\mathscr{C})$ et montrer que cette tangente passe par O si, et seulement si, $a\sin a = 1$.

b. On définit la fonction numérique Ψ sur $]0\ ;\ \pi]$ par

$$\Psi(x) = \sin x - \frac{1}{x}.$$

Étudier les variations de Ψ (on pourra étudier les variations de Ψ' pour connaître le signe de Ψ').

En déduire l'existence pour la fonction Ψ d'un maximum absolu M en un point x_0 (on ne cherchera à calculer ni x_0, ni M).

Calculer $\Psi'(\pi/2)$ et $\Psi(\pi/2)$; en déduire la position de x_0 par rapport à $\pi/2$ et le signe de M.

Montrer alors que Ψ s'annule en deux points p et q de $]0\ ;\ \pi]$ et donner, en la justifiant, une valeur décimale approchée par défaut, à 10^{-1} près, de chacune de ces racines p et q.

c. En utilisant les résultats précédents, conclure quant au nombre de tangentes à $(\mathscr{C})$ que l'on peut mener à partir de O.

B

On définit une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\cos n}$$

et, pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

1. Établir que pour tout entier naturel non nul n, on a l'encadrement

$$\frac{1}{n\mathrm{e}} \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. **a.** En utilisant le fait que pour tout x élément de l'intervalle $[n\ ;\ n+1]$ on a $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (n entier naturel non nul), démontrer que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire l'inégalité $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

b. On pose

$$\Sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

En utilisant le résultat précédent, établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n = +\infty.$$

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

(On pourra utiliser l'encadrement obtenu au B. 1.)