

∞ **Baccalauréat mathématiques élémentaires** ∞
Espagne–Portugal septembre 1963

EXERCICE 1

Résoudre l'équation

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x + 1 = 0.$$

(On fera apparaître, au premier membre, le facteur $\cos x$.)

EXERCICE 2

1. Démontrer que l'égalité

$$a^2 = db^2,$$

où a , b , d sont des entiers positifs et où a et b sont premiers entre eux, entraîne $b = 1$ (on montrera que b divise a).

En déduire que, si d n'est pas un carré parfait, il n'existe aucune fraction égale à \sqrt{d} .

2. On désigne par $A(\sqrt{d})$ l'ensemble des nombres qui sont de la forme $m + n\sqrt{d}$, où m et n sont des entiers relatifs quelconques et où l'entier d n'est pas un carré parfait.

Déterminer l'intersection des deux ensembles $A(\sqrt{2})$ et $A(\sqrt{3})$.

(On pourra commencer par démontrer que toute égalité de la forme

$$m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0,$$

où m , n , p sont des entiers relatifs, entraîne $m = n = p = 0$.)

PROBLÈME

Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires, $x'Ox$ et $y'Oy$; les unités sont les mêmes sur les deux axes.

1. Étudier le sens de variation et construire le graphe (C) (c'est-à-dire la courbe représentative) de la fonction

$$y = \frac{(x+a)\sqrt{a^2-x^2}}{x},$$

où a représente une longueur donnée.

2. Soient A le point de coordonnées $(-a; 0)$ et $t'At$ un axe tel que $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{At}) = \theta$ (avec $0 \leq \theta \leq \pi$).

Si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $t'At$ coupe $y'Oy$ en I et la courbe (C) en un point M autre que A .

Calculer en fonction de θ l'abscisse de M .

Montrer que \overline{IM} est indépendant de θ et en déduire une définition géométrique simple de (C) .

3. Soient M un point de (C) , autre que A , et M_1 un point de (C) dont l'abscisse est de même signe que celle de M . La droite AM_1 coupe $y'Oy$ en I_1 .

Construire le centre, Ω , de la rotation qui transforme \overrightarrow{IM} en $\overrightarrow{I_1M_1}$.

Quelle est la position limite, ω , de Ω quand le point M_1 tend vers le point M ?

En déduire une construction géométrique de la tangente en M à la courbe (C) .

4. Calculer, en fonction de l'abscisse x de M , l'abscisse du point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec $z'Oz$.

Soit P un point quelconque de $z'Oz$, d'abscisse x_0 ; discuter, selon la position de P , le nombre des tangentes que l'on peut mener de P à la courbe (C) .

N. B. - Le 4. peut être traité immédiatement après le 1.