∽ Baccalauréat C Espagne juin 1986 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Soit α un nombre réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}~;~\frac{\pi}{2}\right[$.
On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(\text{E}) \qquad (1+\text{i}z)^3(1-\text{i}\tan\alpha) = (1-\text{i}z)^3(1+\text{i}\tan\alpha).$$

1. Soit z une solution de (E).

a. Montrer que $|1+\text{i}z| = |1-\text{i}z|$.

b. En déduire que z est réel.

2. **a.** Exprimer $\dfrac{1+\text{i}\tan\alpha}{1-\text{i}\tan\alpha}$ en fonction de $\text{e}^{\text{i}\alpha}$.

b. Soit z un nombre réel; on pose $z = \tan\varphi$ où $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$.

Écrire l'équation portant sur φ traduisant (E) et la résoudre.

c. Déterminer les solutions z_1, z_2, z_3 de (E).

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit A et A$'$ deux points distincts du plan, Δ et Δ' les droites perpendiculaires à la droite (AA$'$), respectivement en A et A$'$, et O le milieu de [AA$'$]. On pose OA $= r$.
Pour tout point F du segment [AA$'$], distinct de A et de A$'$, on note P la parabole de foyer F et de sommet A, P$'$ la parabole de foyer F et de sommet A$'$, D la directrice de P et D$'$ la directrice de P$'$.

1. Dans cette question F est fixé et on suppose donné un point commun à P et P$'$.

a. Placer les éléments géométriques précédents sur une figure.

b. Soit H et H$'$ les projections orthogonales de M sur D et D$'$.

Prouver que le cercle C de centre M passant par F est tangent à D et D$'$ aux points H et H$'$ et que MF $= 2r$.

Prouver que droites (FH) et (FH$'$) sont orthogonales; en déduire que les tangentes à P et P$'$ au point M sont orthogonales.

c. Prouver que I milieu de [FM] appartient à la médiatrice de [AA$'$] et que
OF^2 + OI$^2 = r^2$. (On pourra utiliser l'homothétie h de centre F et de rapport 1/2.)

2. On suppose maintenant que F parcourt le segment [AA$'$].

a. Prouver que P et P$'$ se coupent en deux points M$_1$ et M$_2$ symétriques par rapport à la droite (AA$'$) et indiquer comment on peut construire ces points.

b. À l'aide de 1. c. déterminer le lieu géométrique des milieux I$_1$ et I$_2$ de [FM$_1$] et [FM$_2$].

c. En employant un repère cartésien convenablement choisi, déterminer le lieu géométrique E des points M$_1$ et M$_2$ et placer E sur la figure.

N. B.- On admettra le théorème suivant :

Théorème (admis).

Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D); soit M un point de P et H sa projection orthogonale sur D; la tangente en M à P est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\text{HMF}}$.

PROBLÈME **11 POINTS**

Pour tout entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan P rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ (unité 2 cm).

1. **a.** Calculer la dérivée de f_n et préciser la valeur de $f_n'(0)$ lorsque $n = 1$ puis lorsque $n > 2$. Dresser le tableau de variations de f_n pour $n = 1$, n pair, n impair supérieur à 1.

   b. Montrer que, pour tout n et pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$,

$$f_n(x) \leqslant f_n(n) = n^n\mathrm{e}^{-n}.$$

   c. Représenter sur une même figure $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

2. Pour tout réel $X \geqslant 0$, on pose

$$F_n(X) = \int_0^X f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Déterminer des nombres réels a_0, $a_1, \cdots$, a_n tels que la fonction :

$$G_n\,:\,x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\left(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0\right)$$

   soit une primitive de la fonction f_n sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire l'expression de $F_n(X)$ en fonction de X et de n.

   c. L'entier n étant donné, montrer que $F_n(X)$ admet une limite I_n lorsque X tend vers $+\infty$ et que $I_n = n!$.

3. On se propose d'encadrer I_n par une méthode directe, indépendante des résultats du 2.

   a. Á l'aide du 1. b., montrer que

$$\int_0^{2n} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2nn^n\mathrm{e}^{-n}.$$

   b. Montrer que, si $x \geqslant 2n$,

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \leqslant n^n\mathrm{e}^{-n},\text{ et que } f_n(x) \leqslant (2n)^n\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

   En déduire que, si $X \geqslant 2n$,

$$\int_{2n}^X x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2(2n)^n\mathrm{e}^{-2n}.$$

c. Á l'aide de 3. a. et 3. b., majorer $F_n(X)$ lorsque $X \geqslant 2n$.

En déduire que $I_n \leqslant 2n^n \mathrm{e}^{-n}\left[n + \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^n\right]$.

d. Montrer, d'autre part, que

$$(n+1)^n \mathrm{e}^{-n-1} \leqslant \int_n^{n+1} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n.$$

4. Déduire de 3. c. et 3. d. un encadrement de

$$u_n = \frac{\ln I_n - n \ln n}{n}$$

et déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.