✿ Espagne et Portugal Baccalauréat mathématiques juin 1957 ✿

I. 1er sujet
Variation et representation graphique de la fonction

$$y = \frac{4x^2 - 5}{x^2 - 4x + 3}.$$

I. 2e sujet
Resoudre et discuter le systeme d'equations

$$\left\{\begin{array}{lcl}(2m-3)x - my &=& 3m-2,\\ 5x - (2m+3)y &=& 5,\end{array}\right.$$

dans lequel m designe un parametre variable.

I. 3e sujet
Derivee de la racine carree d'une fonction positive et derivable.
Application : Derivee de

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

II.

Sur un axe $x'x$, on choisit une origine O et l'on donne les points A′, A, P d'abscisses respectives

$$3a\overline{\text{OA}'} = -a, \quad \overline{\text{OA}} = a, \quad \overline{\text{OP}} = \frac{3p}{2},$$

a designant une longueur donnee.
On designe par (O) le cercle de diametre A′A. À tout point M de ce cercle, on associe les cercles (ω) et (ω') circonscrits respectivement aux triangles MAP et MA′P.

1. Lieux géométriques des centres (ω) et (ω') des ceroles (ω) et (ω') quand M décrit le cercle (O) en entier.
   Démontrer que les droites Oω et Oω' sont constamment perpendiculaires.
   Si H et H′ sont les projections orthogonales de ω et ω' sur $x'x$, montrer que le produit $\text{H}\omega \cdot \text{H}'\omega'$ est constant et calculer sa valeur.
2. Que peut-on dire de la polaire de ω par rapport au cercle (O) lorsque M décrit ce cercle ?
   Lieu du point d'intersection des polaires de ω et ω' par rapport au cercle (O).
   Préciser les abscisses des points de ce lieu situés sur $x'x$.
3. Démontrer que les cercles (ω) et (ω') sont constamment orthogonaux :
   a. au moyen d'une inversion de pôle P ;
   b. en établissant, par un raisonnement sur des angles de droites, que, si MT et MT′ sont les tangentes en M aux cercles (ω) et (ω'), on a

   $$(\text{MT, MT}') = (\text{MA, MA}') \quad \text{à } k\pi \text{ près.}$$

   En remarquant que $\widehat{\omega \text{P} \omega'} = 90°$, déterminer ω de telle manière que les deux cercles (ω) et (ω') soient égaux; quelles sont les positions correspondantes du point M ?
4. Trouver l'enveloppe de la droite $\omega\omega'$.
   La droite A′M coupant à nouveau en N le cercle de diamètre $\omega\omega'$, trouver le lieu de N.
   Montrer que la droite ωN reste parallèle à $x'x$. Trouver le lieu de l'intersection I des droites OM et ωN.