Baccalauréat mathématiques septembre 1957
Espagne et Portugal

I. 1er sujet

Transformer en produits les sommes

$$\sin p + \sin q \quad \text{et} \quad \cos p + \cos q.$$

Application : Trouver tous les arcs x tels que

$$\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

I. 2e sujet

Exposer, sur l'exemple

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2},$$

une méthode de résolution de l'équation trigonométrique

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

I. 3e sujet

Établir entre les éléments d'un triangle l'un des systèmes de relations appelés systèmes fondamentaux.

Étudier la réciproque.

II.

On considère, dans tout le problème, des triangles OMN variables : le sommet O est fixe, le sommet N reste sur une *demi-droite* fixe Ox, les côtés MO et MN sont égaux, enfin le cercle *inscrit* reste tangent à une droite fixe (D) parallèle à Ox.

On désigne par $2a$ la distance de Ox à (D), par I le centre du cercle inscrit au triangle OMN, par φ l'angle xOI.

1. Construire le triangle OMN, connaissant l'angle φ.
   Discuter.
   Entre quelles limites peut varier l'angle φ ?
   Quel est le lieu du point I ?
2. Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle N du triangle OMN passe par un point fixe.
   Déterminer l'enveloppe de la bissectrice extérieure du même angle.
3. Calculer, en fonction de a et φ, le rayon R du cercle circonscrit au triangle OMN.
   On montrera que R s'exprime uniquement en fonction de a et de $\cos 2\varphi$.
   Déterminer φ de façon que ce rayon ait une valeur donnée.
   Discuter.
4. Soit P le point diamétralement opposé au point M sur le cercle circonscrit au triangle OMN. Trouver le lieu de ce point et celui de l'orthocentre H du triangle OMN.