Baccalauréat mathématiques septembre 1957
États associés et Israël

I. 1er sujet

L'arc x étant mesuré en radians, déterminer la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro.

Définir, puis calculer directement, la dérivée de $y = \sqrt{\sin x}$.

I. 2e sujet

Étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{2(x-2)^2}{2x^2 - 9x + 7}.$$

I. 3e sujet

Résoudre et discuter le système

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y + \sqrt{xy} & = & m, \\ x^2 + y^2 + xy & = & 2m^2, \end{array}\right.$$

m désignant un nombre algébrique donné.

II.

1. O et A désignant deux points marqués sur une droite (D) (OA = a), montrer, en calculant OB = x sur (D) préalablement orientée, que la relation

$$\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}} = \text{AB}^2$$

définit sur (D) deux points B$'$ et B$''$; vérifier que

$$\frac{\overline{\text{OB}'} + \overline{\text{OB}''}}{2} = \frac{3\overline{\text{OA}}}{2}.$$

que

$$\overline{\text{AB}'} \cdot \overline{\text{AB}''} = \text{OA}^2$$

et donner une construction géométrique des points B$'$ et B$''$.

2. Dans le plan d'un cercle donné, de centre M et de rayon R, on marque un point O. Déterminer une sécante passant par O et coupant le cercle en A et B de façon que $\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}} = \text{AB}^2$, en calculant la distance MI du centre M du cercle à cette sécante ; discuter suivant la position du point O dans le plan.

Dans les deux questions suivantes le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et l'on appelle (C) tout cercle du plan coupant $x'x$ en A et B de façon que $\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}} = \text{AB}^2$.

3. Construire (C), connaissant le point A et le rayon R de (C) ; discuter le nombre des solutions suivant la position de A sur $x'x$.

   R restant constant, trouver le lieu des centres M des cercles (C) lorsque A se déplace sur $x'x$, en formant l'équation de ce lieu.

4. Construire (C), connaissant le point A et sachant que (C) est tangent à la droite (Δ) d'équation $y = \lambda,\ \lambda$ désignant un nombre algébrique donné.

   Déterminer, à l'aide de son équation, le lieu des centres M des cercles (C) tangents à (Δ) lorsque A se déplace sur $x'x$; construire les éléments principaux de ce lieu.

   Montrer que ces cercles (C) restent tangents à un cercle fixe (Γ), que la droite joignant les points de contact de (C) avec (Δ) et (Γ) passe par un point fixe ω et que ces cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe (Ω).