

🌀 Baccalauréat États associés et Israël septembre 1957 🌀
Série mathématiques

I. 1^{er} sujet

L'arc x étant mesuré en radians, déterminer la limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers zéro.
 Définir, puis calculer directement, la dérivée de $y = \sqrt{\sin x}$.

I. 2^e sujet

Étudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{2(x-2)^2}{2x^2 - 9x + 7}.$$

I. 3^e sujet

Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = m, \\ x^2 + y^2 + xy = 2m^2, \end{cases}$$

m désignant un nombre algébrique donné.

II.

1. O et A désignant deux points marqués sur une droite (D) ($OA = a$), montrer, en calculant $OB = x$ sur (D) préalablement orientée, que la relation

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = AB^2$$

définit sur (D) deux points B' et B'' ; vérifier que

$$\frac{\overline{OB'} + \overline{OB''}}{2} = \frac{3\overline{OA}}{2}.$$

que

$$\overline{AB'} \cdot \overline{AB''} = OA^2$$

et donner une construction géométrique des points B' et B'' .

2. Dans le plan d'un cercle donné, de centre M et de rayon R, on marque un point O. Déterminer une sécante passant par O et coupant le cercle en A et B de façon que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = AB^2$, en calculant la distance MI du centre M du cercle à cette sécante; discuter suivant la position du point O dans le plan.

Dans les deux questions suivantes le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ et l'on appelle (C) tout cercle du plan coupant $x'x$ en A et B de façon que $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = AB^2$.

3. Construire (C), connaissant le point A et le rayon R de (C); discuter le nombre des solutions suivant la position de A sur $x'x$.

R restant constant, trouver le lieu des centres M des cercles (C) lorsque A se déplace sur $x'x$, en formant l'équation de ce lieu.

4. Construire (C), connaissant le point A et sachant que (C) est tangent à la droite (Δ) d'équation $y = \lambda$, λ désignant un nombre algébrique donné.

Déterminer, à l'aide de son équation, le lieu des centres M des cercles (C) tangents à (Δ) lorsque A se déplace sur $x'x$; construire les éléments principaux de ce lieu.

Montrer que ces cercles (C) restent tangents à un cercle fixe (Γ), que la droite joignant les points de contact de (C) avec (Δ) et (Γ) passe par un point fixe ω et que ces cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe (Ω).