∽ Baccalauréat Éthiopie septembre 1958 ∾

SÉRIE MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

I

1er sujet

Démontrer qu'étant données deux figures F et F′ situées dans un même plan et directement thèses, que l'on précisera, la fonction $y = \sqrt{u}$ admet une dérivée pour une valeur x_1 de la variable et donner l'expression de cette dérivée.
Dire alors pour quelles valeurs de x la fonction

$$y = \sqrt{3x - x^2}$$

est décroissante.
Le graphique de cette fonction admet-il une tangente en son point d'abscisse nulle ?
Si oui, comment peut-on la déterminer ?

2e sujet

Étudier la fonction

$$Y = X^4 - 8X^2 + 7.$$

Tracer le graphique. Comment peut-on utiliser celui-ci pour discuter le nombre de valeurs de l'arc x comprises entre $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$ qui sont solutions de l'équation suivante :

$$\text{tg}^4 x - 8\text{tg}^2 x + 7 = m,$$

m étant un paramètre ?
Indiquer comment on peut calculer ces solutions.

3e sujet

Démontrer que, si une fonction $y = f(x)$ est positive et continue lorsque x croit d'une valeur a à une valeur b et admet une fonction $F(x)$ connue pour primitive, on peut calculer l'aire de la surface comprise entre le graphique de cette fonction y, l'axe des x et les perpendiculaires à cet axe aux points d'abscisses a et b.
Appliquer la formule trouvée au cas où $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ avec $a = 1$ et $b = 4$.

I

On considère sur une droite xy un segment FK de longueur d, la droite D perpendiculaire à xy en K et l'on appelle conique (C) toute conique admettant F pour foyer et D pour directrice associée, à ce foyer.

1. Montrer que par tout point A du segment FK il passe une conique (C) et une seule.
   Quel est, d'après la position de A, le genre de cette conique ?
   Si (C) est une ellipse ou une hyperbole, comment peut-on construire le point A′ où cette conique recoupe la droite xy et déterminer ainsi le centre O de (C) et son cercle principal (Γ) ?
   Comment peut-on déterminer une conique (C) qui a pour centre un point O fixé sur xy ? Condition de possibilité ?

Comment peut-on déterminer une conique (C) dont le cercle principal (Γ) a pour diamètre une longueur fixée $2a$?

Montrer qu'il y a deux coniques (C) répondant à cette condition et dire quelle relation existe entre leurs excentricités e et e_1.

2. On considère une conique (C) de cercle principal (Γ), on marque un point T sur la droite D et l'on trace le cercle (ω) de centre ω et de diamètre FT, qui coupe (Γ) en N et N$'$.

Démontrer que les droites TN et TN$'$ sont tangentes à la conique (C) et que les points de contact M et M$'$ appartiennent à la tangente en F au cercle (ω).

Comment peut-on adapter ce mode de construction au cas où (C) est une parabole ?

Lorsque (C) est une hyperbole, pour quelles positions de T, pris sur D, les points de contact M et M$'$ sont-ils sur la même branche de celle-ci ?

3. Démontrer que, si (C) a un centre O, le diamètre apparent du cercle (Γ) vu du point ω est toujours égal au double de l'angle aigu α sous lequel se coupent les tangentes TN et TN$'$.

Déterminer alors, par une construction, les coniques (C) qui sont telles que, si, de T fixé sur D, on trace les tangentes à l'une d'elles, celles-ci forment un angle aigu de valeur α donnée.

Faire la construction en supposant $\alpha = 60°$.