Baccalauréat Éthiopie [1]
septembre 1959 Série mathématiques

I

1$^{\text{er}}$ sujet

Établir les formules de transformation en produit de la somme et de la différence de deux cosinus ou de deux sinus :

$$\cos p \pm \cos q, \qquad \sin p \pm \sin q.$$

Application : Résoudre l'équation

$$\cos 5x - \cos x = \sin 3x.$$

Marquer sur le cercle trigonométrique les extrémités des arcs solutions.

2$^{\text{e}}$ sujet

Résolution et discussion de l'équation

$$a\cos x + b\sin x = c$$

par une seule méthode.
Interprétation géométrique.

3$^{\text{e}}$ sujet

Dérivée de $y = \dfrac{u}{v}$, u et v étant deux fonctions de x ayant des dérivées, u' et v'.
Application : Calculer la dérivée de

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$$

Existe-t-elle pour toutes les valeurs de x ?
Quel est le signe de cette dérivée ?

II

Soient un segment AA′ de longueur 2 unités (placer A′ à droite de A) et O le milieu de AA′ ; on trace les perpendiculaires D et D′ respectivement en A et A′ à ce segment et l'on considère un cercle variable (C) de centre C tangent à D et à D′ respectivement en T et T′.
Soit M le point de contact de la deuxième tangente issue de A à (C). On se propose d'étudier quelques propriétés de la courbe lieu de M quand (C) varie.

1. Montrer que les points A, T, C, M, O sont cocycliques, que la polaire de A par rapport à (C) est perpendiculaire à OM, que la perpendiculaire en T à TM coupe AA′ en un point fixe, F.
   Trouver alors l'enveloppe de la polaire de A quand (C) varie.
   Les droites AM et OC se coupent en ω ; montrer que $\omega\text{M} = \omega\text{O}$.
2. Il existe un deuxième cercle, (C′), tangent à la fois à D, à D′ et à la droite AM ; construire ce cercle.
   Soit M′ son point de contact avec AM ; montrer que le triangle MOM′ est rectangle et que le produit $\overline{\text{AM}} \times \overline{\text{AM}'}$ reste constant quand la droite AMM′ tourne autour de A.

1. Nouvelle-Calédonie novembre 1959

3. En utilisant ce qui précède, donner une construction très simple des points M et M$'$ situés sur une droite donnée issue de A, sans faire intervenir les cercles (C) et (C$'$).

On prend pour axes Ox porté par AA$'$ et dirigé de O vers A$'$ et Oy tel que $(\text{O}x,\ \text{O}y) = +\dfrac{\pi}{2}$; on pose $(\text{A}x,\ \text{A}M) = \theta$.

Calculer Oω en fonction de θ ; former l'équation de la droite AM, puis celle du cercle de centre ω et de rayon ωO ; en déduire la relation indépendante de θ qui lie les coordonnées $x,\ y$ de M ou de M$'$.

4. Construire la courbe lieu des points M et M$'$ après avoir étudié la fonction

$$y = \sqrt{\frac{1+}{1-x}}.$$

Quelles propriétés simples de cette courbe vous suggère l'étude faite dans les questions précédentes ?