Baccalauréat Éthiopie septembre 1967

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES
Sujet de secours

Exercice 1

On donne trois points non alignés, A, B, et C.
Indiquer un mode de construction et discuter l'existence d'un point G satisfaisant à l'égalité vectorielle

$$\frac{\overrightarrow{\text{GA}}}{\text{GA}} + \frac{\overrightarrow{\text{GB}}}{\text{GB}} + \frac{\overrightarrow{\text{GC}}}{\text{GC}} = \overrightarrow{0},$$

GA, GB, GC étant les distances respectives de G aux points A, B et C.
On montrera qu'un tel point G, s'il existe, est nécessairement intérieur au triangle ABC et l'on donnera la mesure, en radians, modulo 2π, des angles $\left(\overrightarrow{\text{GB}}, \overrightarrow{\text{GC}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{GC}}, \overrightarrow{\text{GA}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{GA}}, \overrightarrow{\text{GB}}\right)$

Exercice 2

1. Calculer et écrire dans le système de numération de base 7 la somme des multiples par 1, 2, 3, 4, 5 et 6 du nombre qui, dans ce système, s'écrit 1110.
2. Même problème pour la somme des multiples par 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 du nombre qui s'écrit 1110 dans le système de base 8.
3. Dans quels cas les résultats obtenus au 1 et au 2 se généralisent-ils à la somme des multiples par 1, 2, 3, ..., $(n-1)$ du nombre qui s'écrit 1110 dans le système de base n ?

Exercice 3

On considère les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3,..., f_n (n entier positif) de la variable x définies par :

$$\begin{array}{rcl}
f_0(x) & = & \text{Log}\,|x|;\\
f_1(x) & = & f_0(x+1) - f_0(x);\\
f_2(x) & = & f_1(x+1) - f_1(x);\\
f_3(x) & = & f_2(x+1) - f_2(x);\\
\ldots & = & \ldots\\
f_n(x) & = & f_{n-1}(x+1) - f_{n-1}(x).
\end{array}$$

Log est la notation désignant un logarithme népérien ; $|x|$ est la valeur absolue du nombre réel x.

1. **a.** Indiquer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
   b. Étudier les variations des fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 dans leurs domaines de définition respectifs.
   Tracer les courbes C_0, C_1, C_2 et C_3 qui représentent graphiquement ces variations relativement à un repère orthonormé $x'\text{O}x, y'\text{O}y$.
2. **a.** Montrer que C_0 et C_2 possèdent un axe de symétrie et que C_1 et C_3 possèdent un centre de symétrie.

b. Calculer les abscisses des points de rencontre avec l'axe $x'\mathrm{O}x$ des courbes C_0, C_1, C_2 et C_3.

Il est conseillé, dans le cas de C_3, de faire un changement d'origine convenable.

3. Montrer que la fonction f_n a pour dérivée, pour la valeur x,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Sans s'attarder à étudier en détail les variations de cette dérivée f_n' et à en tracer, relativement à un repère orthonormé, la courbe représentative, Γ_n examiner dans quels cas Γ_n admet, soit un axe de symétrie, soit un centre de symétrie.

Préciser la position de cet axe ou de ce centre de symétrie.

4. **a.** Calculer, en raisonnant par récurrence, $f_n(x)$ en fonction de $f_0(x)$, $f_0(x+1), \dots, f_0(x+n)$.

b. On désigne par C_n la courbe qui, dans un repère orthonormé, a pour équation

$$y = f_n(x).$$

Montrer que, si n est pair ($n = 2q$), la courbe C_{2q} admet un axe de symétrie et que, si n est impair ($n = 2q+1$), la courbe C_{2q+1} admet un centre de symétrie.

On pourra, soit raisonner par récurrence, soit utiliser la formule obtenue au 4. a.