Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger [1] juin 1992

EXERCICE 1 **4 points**

I. La fonction numérique g est définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6.$$

En utilisant le sens de variation de g, déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

II. La fonction numérique f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1.$$

1. Déterminer les limites de f en 0, en $+\infty$.
2. Utiliser (1) pour déterminer le sens de variation de f.
3. **a.** Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormal du plan.
   Montrer que Δ est asymptote à C et étudier la position relative de C et Δ.

   b. Construire C et Δ.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan orienté, soit ABC un triangle équilatéral tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

I est le milieu de [BC] et J le point tel que B soit le milieu de [JC].
r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B et d'angle $\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

1. Soit A′ et B′ les images respectives des points A et B par l'application $r_2 \circ r_1$.
   Démontrer que I est le milieu de [AA′] et B le milieu de [AB′] ; faire une figure.
2. En précisant la nature de $r_2 \circ r_1^{-1}$, démontrer que pour tout point M du plan, I est le milieu de $[\text{M}_1\text{M}_2]$, M_1 étant l'image de M par r_1 et M_2 l'image de M par r_2.
3. Démontrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

PROBLÈME **12 points**

I. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme u_0 et par la condition :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Démontrer que si $u_0 + u_0^2 > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

1. Egypte-Éthiopie-Israël-Burkina-Faso

4. Démontrer par récurrence que :
si $u_0 + u_0^2 < 0$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $-1 < u_n < 0$.
Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II. Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ et F l'application de P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z^2 + z$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par F, puis l'ensemble des points invariants par $F \circ F$.
2. Soit A, B et I les trois points de P d'affixes respectives i, $-1-\text{i}$, $-\dfrac{1}{2}$. Déterminer $F(\text{A})$ et $F(\text{B})$.
Soit M_0 un point du plan. Démontrer que :
$F(\text{M}) = F(\text{M}_0)$ si et seulement si : $\text{M} = \text{M}_0$ ou $\text{M} = S(\text{M}_0)$ où S est une transformation simple du plan que l'on précisera.

III. Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
(Pour les figures, on prendra $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| = 4$ cm.)

1. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient $x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ et $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x et y vérifient $y^2 + x = 0$.
Donner la nature des coniques $\mathscr{H}$ et $\mathscr{P}$ et préciser leurs éléments de symétrie et les asymptotes éventuelles.
Représenter ces coniques sur une même figure. (On admettra qu'elles sont tangentes aux points d'abscisse $x = -1$.)
2. Soit $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{P}_1$ les ensembles de points du plan dont les coordonnées x et y vérifient respectivement :

$$\mathscr{H}_1 \left\{\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ x^2 - y^2 + x + 1 > 0 \end{array}\right. \qquad \mathscr{P}_1 \left\{\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ y^2 + x < 0 \end{array}\right.$$

   a. Hachurer $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{P}_1$ sur la figure précédente. (On ne cherchera pas à le justifier par le calcul.)
   b. Démontrer que $\mathscr{P}_1$ est inclus dans $\mathscr{H}_1$ puis que $\mathscr{P}_1$ est inclus dans D(K, 1) avec D(K, 1) ensemble des points M tels que $\|\text{KM}\| < 1$, K étant le point d'affixe -1.
   c. Démontrer que si M appartient à $\mathscr{H}_1$ alors $F(\text{M})$ appartient à $\mathscr{P}_1$.
3. Soit M_0 un point de $\mathscr{H}_1$. On définit la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
pour tout n de $\mathbb{N}$, $\text{M}_{n+1} = F(\text{M}_n)$.
En utilisant 2. b. et c., montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, z_n étant l'affixe de M_n et $|z_n|$ le module de z_n.