

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C Centres étrangers septembre 1993 œ

EXERCICE 2

5 points

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.

Pour tout n on pose $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (\ln t)^n dt$.

1. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = -1$.
b. Montrer que, pour tout n , on a : $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e$.
c. Montrer que, pour tout n , on a :

$$I_n = e \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) - 1.$$

2. a. Démontrer que : $0 \leq \int_1^e (\ln t)^n dt \leq e - 1$.
b. En déduire que : $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$.
c. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?
3. Pour tout n , on pose : $S_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$.
Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n)

EXERCICE 2

4 points

Un concours se présente sous la forme d'un « questionnaire à choix multiples » comportant 10 questions. Chaque question propose 3 réponses possibles dont une et une seule est exacte. Le candidat doit obligatoirement cocher une réponse et une seule par question.

1. De combien de façons différentes un candidat peut-il remplir un questionnaire ?
2. En remplissant le questionnaire au hasard, quelle est la probabilité pour que le candidat ait répondu correctement à :
 - a. toutes les questions ?
 - b. aucune question ?
 - c. au moins une question ?
3. Le jury a établi le barème donné dans le tableau ci-dessous :

numéro de la question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre de points attribués si la réponse est exacte	1	1	1	2	2	2	4	4	4	8
nombre de points attribués si la réponse est fausse	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus. Quelle est la probabilité pour que $X \geq 27$?

N.B. : Pour les valeurs des probabilités, on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale avec deux chiffres significatifs.

PROBLÈME**10 points**

On considère le plan orienté \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note \mathcal{P}^* le plan privé de O et \mathcal{D} la droite d'équation $x = \frac{9}{4}$.

Les courbes demandées seront tracées sur une feuille de papier millimétré.

L'origine O du repère sera placée au centre de la feuille et l'unité graphique sera de 1 cm.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A**Étude d'une conique**

Soit \mathcal{C} la conique de foyer O, de directrice \mathcal{D} et d'excentricité $\frac{4}{5}$.

(On rappelle que \mathcal{C} est l'ensemble des points M de \mathcal{P} tels que $\frac{MO}{MH} = \frac{4}{5}$ où H est la projection orthogonale de M sur \mathcal{D} .)

1.
 - a. Déterminer la nature et une équation cartésienne de \mathcal{C} dans le repère .
 - b. Préciser son centre, ses axes et ses sommets. \mathcal{R} .
 - c. Tracer \mathcal{C} .
2. Soit M un point quelconque du plan, distinct de O, et t une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

- a. Montrer que, si M appartient au demi-plan défini par $x < 4$, alors la distance de M à \mathcal{D} est égale à $\frac{9}{4} - OM \cos t$.
- b. Montrer que M appartient à \mathcal{C} si et seulement si

$$OM(4 \cos t + 5) = 9$$

- c. En déduire que \mathcal{C} est l'ensemble des points d'affixe

$$\frac{9}{4 \cos t + 5} e^{it}$$

où t appartient à \mathbb{R} .

Partie B**Étude d'une courbe**

Soit \mathcal{C} l'ensemble des points d'affixe $\frac{9}{4 \cos t + 5} e^{it}$ où t appartient à \mathbb{R} .

Soit φ la transformation de \mathcal{P}^* dans lui-même qui à tout point $M(t)$ d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{9}{z}$.

On note \mathcal{L} l'image de \mathcal{C} par φ .

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = (4 \cos t + 5) \cos t \quad \text{et} \quad g(t) = (4 \cos t + 5) \sin t.$$

1. Montrer que \mathcal{L} est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x; y)$ telles que $x = f(t)$ et $y = g(t)$, où t appartient à \mathbb{R} .
2. Étude de la fonction f

- a. Calculer $f''(t)$ et factoriser le résultat obtenu.
- b. Montrer qu'il existe un unique élément α de $[0 ; \pi]$ tel que $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$.
- c. En déduire les valeurs de t qui annulent $f''(t)$ et le signe de $f''(t)$, pour t appartenant à $[0 ; \pi]$.
3. Étude de la fonction g
- a. Montrer que $g'(t) = 8\cos^2 t + 5\cos t - 4$.
- b. Déterminer les racines et le signe du polynôme

$$P(X) = 8X^2 + 5X - 4.$$

- c. En déduire que, sur $[0 ; \pi]$, il existe un unique réel β tel que $g'(\beta) = 0$.
- d. Déterminer le signe de $g'(t)$ sur $[0 ; \pi]$, où t appartient à \mathbb{R} .
4. a. Ranger dans l'ordre croissant les réels α , β , $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
- b. Faire un tableau récapitulatif des variations de f et g sur $[0 ; \pi]$. (On ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes des images de α et β .)
5. On note \mathcal{L}_1 la partie de \mathcal{L} formée des points $M(t)$ avec t appartenant à $[0 ; \pi]$.
- a. Déterminer les points d'intersection de \mathcal{L}_1 avec l'axe (O, \vec{j}) .
- b. Placer les points $M(t)$ pour t égal à α , β , 0 , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π et les tangentes à \mathcal{L}_1 parallèles aux axes, puis tracer \mathcal{L}_1 .
- c. Terminer, en justifiant, le tracé de \mathcal{L} .