Durée : 4 heures

Baccalauréat C Centres étrangers gr. I [1] juin 1991

EXERCICE 1 **6 points**

Dans le plan complexe, on considère les quatre points A, B, C, D d'affixes respectives 1, i, $-1, -\mathrm{i}$. Soit M un point d'affixe z.

1. Exprimer en fonction de z le nombre réel :

$$p = \mathrm{MA} \times \mathrm{MB} \times \mathrm{MC} \times \mathrm{MD}.$$

2. On suppose que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
   Donner une relation entre r et θ nécessaire et suffisante pour que $p = 1$.
3. Chercher les affixes des points M de l'axe des réels solutions de $p = 1$.
   Donner sous forme trigonométrique les affixes des points M du cercle trigonométrique tels que $p = 1$.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan on considère deux cercles C et C$'$ de centres respectifs O et O$'$, de même rayon R, tangents extérieurement en un point A.
À tout point M de C, on associe le point M$'$ de C$'$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \text{ entier.}$$

1. Montrer qu'il existe une rotation de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, dont on construira géométriquement le centre Ω, qui envoie C sur C$'$.
   Quelle est l'image de M par cette rotation ?
2. Montrer que I, milieu de [MM$'$] est l'image de M par une similitude f directe de centre Ω.
   Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude.
   En déduire le lieu de I quand M décrit C.
3. Donner l'image de O par la similitude f et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{AI}}\right)$.

PROBLÈME **10 points**

On rapporte le plan à un repère orthonormé $R\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'unité de longueur est de 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour $x \in]1\,;\,+\infty[$ on définit deux fonctions P_n et f_n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_n(x) &=& \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\,;\\ f_n(x) &=& \ln(x-1) + P_n(x). \end{array}\right.$$

(On rappelle que ln désigne la fonction logarithme népérien.).

1. Algérie, Burundi, Cameroun, Égypte, Éthiopie, Israël, Madagascar, Maroc, Portugal, Sénégal, Togo, Zaïre, Gabon, Djibouti

A.

1. **a.** Donner une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

   b. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, trouver pour $x \neq 1$ une forme équivalente à l'expression :

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}.$$

   c. Étudier le sens de variation des fonctions P_n et f_n et les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
   On note α_n cette solution.

   a. Donner et justifier un encadrement de α_n à 10^{-2} près.

   b. Tracer $\mathscr{C}_3$ courbe représentative de f_3.
   On placera les points de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$; $(2\ ;\ f(2))$.

3. Donner une expression simple et le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire la monotonie de la suite (α_n). Étudier la convergence de la suite (α_n).

4. Soit p un entier positif non nul.
   Montrer que $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p}$.
   En déduire :

   a. que $\ln(n+1) \leqslant P_n(1)$.

   b. que $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) > 0$.

   c. et enfin que $1 < \alpha_n < 1 + \dfrac{1}{n+1}$.
   En déduire la limite de la suite (α_n).

B.

1. Étudier le sens de variation de f'_{n+1} sur l'intervalle $\left]1\ ;\ 1 + \dfrac{1}{n+1}\right[$.

2. Écrire l'inégalité des accroissements finis pour f_{n1} sur $[\alpha_{n+1}\ ;\ \alpha_n]$.
   Montrer en utilisant le résultat de A. 3. que :

$$\alpha_{n+1} - 1 \leqslant (n+1)\left(\alpha_n - \alpha_{n+1}\right) \leqslant \alpha_n - 1.$$

3. En déduire un encadrement de α_4 à partir de celui de α_3.