Durée : 4 heures

Baccalauréat C Étranger groupe 2 [1] juin 1993

Exercice 1 **4 points**

Dans le plan orienté, soit ABCD un carré de centre I tel que AB = 1 et $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit t un nombre réel strictement positif. On pose :

$$\overrightarrow{\text{BE}} = t\overrightarrow{\text{CB}}, \quad \overrightarrow{\text{CF}} = t\overrightarrow{\text{DC}}, \quad \overrightarrow{\text{DG}} = t\overrightarrow{\text{AD}}, \quad \overrightarrow{\text{AH}} = t\overrightarrow{\text{BA}}.$$

Faire une figure en prenant $t = 2$ et en choisissant pour unité 3 cm.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature du quadrilatère EFGH par deux méthodes différentes.

1. Première méthode (emploi des nombres complexes)

   On considère le repère orthonormal $\left(\text{A},\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

   a. Déterminer les affixes des points A, B, C, D, puis celles des points E, F, G, H.

   b. En déduire la nature du quadrilatère EFGH.

2. Deuxième méthode (emploi d'une rotation)
   Soit r la rotation de centre I et d' angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   a. Déterminer les images par r des points B, C, E.

   b. Déterminer de même les images par r des points F, G, H, puis conclure.

Exercice 2 **4 points**

Dans une fête foraine, on a organisé une loterie.
À cette loterie, il y a plusieurs carnets identiques de 100 billets.
Dans chaque carnet :

- un des billets gagne 100 F,
- deux des billets gagnent 50 F,
- sept des billets gagnent 20 F,
- les autres billets ne gagnent rien.

1. *Première situation* Une personne prend un billet au hasard dans un carnet complet.
   Soit X la variable aléatoire : « somme gagnée par cette personne ».

   a. Établir la loi de probabilité de X.

   b. Déterminer la probabilité de l'événement E suivant : « la personne gagne au moins 20 F ».

1. Algérie, Djibouti, Gabon, Mali, Maroc, Sénégal

2. *Deuxième situation*

On présente à une autre personne n carnets complets ($n \geqslant 1$) et cette personne choisit, au hasard, un billet dans chaque carnet. Ces n choix sont supposés indépendants les uns des autres et la probabilité de gagner est la même pour chaque carnet.

a. Quelle est la probabilité P_n pour que cette personne ait au moins un billet gagnant ?

b. Calculer le plus petit des entiers n tels que $P_n \geqslant 0,5$.

PROBLÈME **12 points**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 10 cm).

On considère en outre la suite (u_n) définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie I
Étude de la fonction f_n

1. *On suppose* $n = 0$

a. Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Étudier le sens de variation de f_0 puis dresser son tableau de variations.

c. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(0\,;\, \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_0$.

d. Tracer la courbe $\mathscr{C}_0$ en précisant sa tangente en I.

2. *On suppose que* $n \geqslant 1$

a. Étudier les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que, pour tout x, on a :

$$f_n'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-nx}\left[n + (n+1)\mathrm{e}^x\right]}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}.$$

c. Étudier le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variations.

d. Vérifier que le point I appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

e. Tracer $\mathscr{C}_1$ dans le même repère que $\mathscr{C}_0$, en précisant sa tangente en I.

Partie II
Étude de la la suite (u_n)

Dans cette partie, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1. *Étude d'une suite auxiliaire* (v_n)

Pour tout n, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer v_n.

b. Déterminer $\lim v_n$ puis $\lim (nv_n)$.

2. *Comparaison de* (u_n) *à* (v_n)

a. Établir que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, on a : $2 \leqslant \mathrm{e}^x + 1 \leqslant 2\mathrm{e}^x$.

b. En déduire que, pour tout n, on a : $\dfrac{1}{2}v_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}v_n$.

c. Déterminer $\lim u_n$ puis $\lim nu_n$.

3. *Étude d'une suite associée à* (u_n)

On pose : $s_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p$ et $t_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} v_p$.

a. Montrer que : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

(on observera que, pour tout p, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{-p}}{p} \leqslant \mathrm{e}^{-p}$)

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[p\,;\; p+1]$, montrer qu'on a : $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \dfrac{1}{p}$.

c. En déduire que, pour tout n, on a : $\ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} \leqslant 1 + \ln(n)$.

d. Montrer, en utilisant a. et c. que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{t_n}{\ln(n)}$.

e. Que peut-on en déduire pour s_n ?