Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Centres étrangers septembre 1993 ∾

EXERCICE 2 **5 points**

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.
Pour tout n on pose $I_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln t)^n\,\text{d}t$.

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = -1$.

   b. Montrer que, pour tout n, on a : $I_{n+1} = I_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\text{e}$.

   c. Montrer que, pour tout n, on a :

$$I_n = \text{e}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - 1.$$

2. **a.** Démontrer que : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln t)^n\,\text{d}t \leqslant \text{e} - 1$.

   b. En déduire que : $|I_n| \leqslant \dfrac{\text{e}-1}{n!}$.

   c. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?

3. Pour tout n, on pose : $S_n = \dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!}$.
   Déduire des questions précédentes la limite de la suite (S_n)

EXERCICE 2 **4 points**

Un concours se présente sous la forme d'un « questionnaire à choix multiples » comportant 10 questions. Chaque question propose 3 réponses possibles dont une et une seule est exacte. Le candidat doit obligatoirement cocher une réponse et une seule par question.

1. De combien de façons différentes un candidat peut-il remplir un questionnaire ?
2. En remplissant le questionnaire au hasard, quelle est la probabilité pour que le candidat ait répondu correctement à :

   a. toutes les questions ?

   b. aucune question ?

   c. au moins une question ?
3. Le jury a établi le barème donné dans le tableau ci-dessous :

numéro de la question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombre de points attribués si la réponse est exacte	1	1	1	2	2	2	4	4	4	8
nombre de points attribués si la réponse est fausse	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus. Quelle est la probabilité pour que $\text{X} \geqslant 27$?

N. B. : Pour les valeurs des probabilités, on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale avec deux chiffres significatifs.

PROBLÈME **10 points**

On considère le plan orienté $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = \left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

On note $\mathscr{P}^\star$ le plan privé de O et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = \dfrac{9}{4}$.
Les courbes demandées seront tracées sur une feuille de papier millimétré.
L'origine O du repère sera placée au centre de la feuille et l'unité graphique sera de 1 cm.
Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Étude d'une conique

Soit $\mathscr{C}$ la conique de foyer O, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité $\dfrac{4}{5}$.

(On rappelle que $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{P}$ tels que $\dfrac{M\text{O}}{MH} = \dfrac{4}{5}$ où H est la projection orthogonale de M sur $\mathscr{D}$.

1. **a.** Déterminer la nature et une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ dans le repère .
   b. Préciser son centre, ses axes et ses sommets. $\mathscr{R}$.
   c. Tracer $\mathscr{C}$.
2. Soit M un point quelconque du plan, distinct de O, et t une mesure de l'angle $\left(\vec{\imath},~\overrightarrow{\text{O}M}\right)$.
   a. Montrer que, si M appartient au demi-plan défini par $x < 4$, alors la distance de M à $\mathscr{D}$ est égale à $\dfrac{9}{4} - \text{O}M\cos t$.
   b. Montrer que M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si

$$\text{O}M(4\cos t + 5) = 9$$

.

   c. En déduire que $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points d'affixe

$$\frac{9}{4\cos t + 5}\text{e}^{\text{i}t}$$

   où t appartient à $\mathbb{R}$.

Partie B

Étude d'une courbe

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points d'affixe $\dfrac{9}{4\cos t + 5}\text{e}^{\text{i}t}$ où t appartient à $\mathbb{R}$.
Soit φ la transformation de $\mathscr{P}^\star$ dans lui-même qui à tout point $M(t)$ d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{9}{\overline{z}}$.
On note $\mathscr{L}$ l'image de $\mathscr{C}$ par φ.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = (4\cos t + 5)\cos t \quad \text{et} \quad g(t) = (4\cos t + 5)\sin t.$$

1. Montrer que $\mathscr{L}$ est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x~;~y)$ telles que $x = f(t)$ et $y = g(t)$, où t appartient à $\mathbb{R}$.

2. Étude de la fonction f

a. Calculer $f''(t)$ et factoriser le résultat obtenu.

b. Montrer qu'il existe un unique élément α de $[0~;~\pi]$ tel que $\cos\alpha = -\dfrac{5}{8}$.

c. En déduire les valeurs de t qui annulent $f''(t)$ et le signe de $f''(t)$, pour t appartenant à $[0~;~\pi]$.

3. Étude de la fonction g

a. Montrer que $g'(t) = 8\cos^2 t + 5\cos t - 4$.

b. Déterminer les racines et le signe du polynôme

$$P(X) = 8X^2 + 5X - 4.$$

c. En déduire que, sur $[0~;~\pi]$, il existe un unique réel β tel que $g'(\beta) = 0$.

d. Déterminer le signe de $g'(t)$ sur $[0~;~\pi]$. où t appartient à $\mathbb{R}$.

4. a. Ranger dans l'ordre croissant les réels α, β, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

b. Faire un tableau récapitulatif des variations de f et g sur $[0~;~\pi]$. (On ne cherchera pas à calculer les valeurs exactes des images de α et β.)

5. On note $\mathcal{L}_1$ la partie de $\mathcal{L}$ formée des points $M(t)$ avec t appartenant à $[0~;~\pi]$.

a. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{L}_1$ avec l'axe $\left(\text{O}, \vec{J}\right)$.

b. Placer les points $M(t)$ pour t égal à α, β, 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π et les tangentes à $\mathcal{L}_1$ parallèles aux axes, puis tracer $\mathcal{L}_1$.

c. Terminer, en justifiant, le tracé de $\mathcal{L}$.