∽ Baccalauréat S Centres étrangers II juin 1997 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

— la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à $\dfrac{1}{50}$;

— la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\dfrac{1}{500}$;

— la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\dfrac{1}{100}$.

On pourra noter :
A l'évènement « l'alarme se déclenche » ;
I l'évènement « un incident se produit » ;
$\overline{A}$ et $\overline{I}$ leurs évènements contraires respectifs.
Ainsi, par exemple, $A \cap \overline{I}$ représente l'évènement « l'alarme se déclenche sans qu'il y ait incident ».

Partie A

1. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
   En déduire la probabilité que l'alarme se déclenche.
2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Partie B

Les assureurs estiment qu'en moyenne, pour l'entreprise, le coût des anomalies est le suivant :

— 5 000 F pour un incident lorsque l'alarme fonctionne ;

— 15 000 F pour un incident lorsque l'alarme ne se déclenche pas ;

— 1 000 F lorsque l'alarme se déclenche par erreur.

On considère qu'il se produit au plus une anomalie par jour.
Soit X la variable représentant le coût journalier des anomalies pour l'entreprise.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Quel est le coût journalier moyen des anomalies ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

1. Soit l'intégrale : $\text{K} = \displaystyle\int_0^{\pi} \text{e}^x \cos(2x)\,\text{d}x$.
   À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que : $\text{K} = \dfrac{\text{e}^{\pi} - 1}{5}$.
2. Soient $\text{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \text{e}^x \cos^2 x\,\text{d}x$ et $\text{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \text{e}^x \sin^2 x\,\text{d}x$.
   Calculer $\text{I} + \text{J}$ et $\text{I} - \text{J}$.
   En déduire les valeurs de I et J.
3. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$.
   Retrouver directement les valeurs de I et de J à l'aide de ce résultat et de la première question.

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement de spécialité

Soit $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal du plan. On considère la courbe $(\mathscr{C})$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 3\cos t \\ y & = & 2\sin t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'intervalle } [0~;~2\pi]$$

1. Reconnaître la nature de la courbe $(\mathscr{C})$ et en donner l'équation cartésienne.
   Tracer $(\mathscr{C})$ (unité graphique 2 cm).
2. Exprimer en fonction de t, l'affixe z d'un point $M(t)$ de $(\mathscr{C})$.
3. Soit A le point d'affixe 2. Pour tout point M de $(\mathscr{C})$, on construit le point M' tel que le triangle $\mathrm{A}MM'$ soit direct, rectangle en A et tel que : $\mathrm{A}M' = \dfrac{\mathrm{A}M}{2}$.
   a. Montrer que M' est l'image de M par une similitude directe que l'on précisera.
   b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de t.
   c. En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points M' lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.
   d. Montrer que M' appartient à la courbe $(\mathscr{C}')$ d'équation cartésienne :

   $$(x-2)^2 + \frac{4}{9}(y+1)^2 = 1.$$

   Montrer que $(\mathscr{C}')$ est une conique dont on précisera le centre.

PROBLÈME **11 points**

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On cherche dans cette partie à résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 2y' + y = -x + 1$$

c'est-à-dire qu'on cherche à déterminer l'ensemble des fonctions numériques g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout réel x : $g''(x) - 2g'(x) + g(x) = -x + 1$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Déterminer deux nombres réels m et p tels que la fonction u définie par : $u(x) = mx + p$ soit solution de l'équation différentielle (E).
3. Démontrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si la fonction $g - u$ est solution de l'équation différentielle (E$'$).
4. Résoudre l'équation différentielle (E).
5. Déterminer la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de (E) et telle que : $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$.

Partie B - Étude d'une solution de l'équation différentielle

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - x - 1.$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Vérifier que, pour tout réel x : $f'(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1$.

b. Étudier le signe de $e^x - 1$ et celui de xe^x.

c. En déduire le sens de variation de f.

3. Tracer $(\mathscr{C})$ et (D).

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
On note a celle qui est positive. Montrer que : $0,8 \leqslant a \leqslant 0,81$.

Partie C - Détermination d'une valeur approchée de a

1. Soit x_0 un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse x_0 et on note x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.
Établir la relation : $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On considère la fonction φ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par la relation

$$(1):\quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

L'étude faite dans la partie B du problème montre que φ est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On remarquera que c$\varphi(a) = a$.

2. **a.** Vérifier que pour tout $x > 0$: $\quad \varphi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$.
(on utilisera la relation (1) sans expliciter ni $f(x)$ ni $f'(x)$.

b. Calculer $f''(x)$.

c. Démontrer que f' et f'' sont croissantes sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d. En déduire que, si x appartient à l'intervalle $[a\ ;\ 0,81]$:

$$0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{f(0,81)f''(0,81)}{[f'(0,8)]^2}.$$

e. Démontrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ 0,81]$:

$$0 \leqslant \varphi(x) - a \leqslant 10^{-2}(x - a).$$

f. En déduire que, si $a \leqslant x \leqslant 0,81$, alors : $a \leqslant \varphi(x) \leqslant 0,81$.

3. On pose : $x_0 = 0,81,\ x_1 = \varphi(x_0)$ et $x_2 = \varphi(x_1)\cdot$

a. Démontrer que x_2 est une valeur approchée par excès à 10^{-6} près de a.

b. Donner, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de x_2.