Baccalauréat C Étranger groupe I bis septembre 1981

EXERCICE 1

E est un espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
f est l'application de E vers E définie par :

$$\begin{cases} f\left(\vec{\imath}\right) = -\frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}, \\ f\left(\vec{\jmath}\right) = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{1}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}, \\ f\left(\vec{k}\right) = \frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} - \frac{1}{3}\vec{k}. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une rotation vectorielle. Déterminer son axe.
2. Déterminer $f \circ f$. Que peut-on en déduire pour f ?

EXERCICE 2

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division de 3^n par 7.
2. Déterminer le reste de la division par 7 du nombre A sachant que

$$A = (2243)^{325} + (1179)^{154}.$$

3. Le nombre B s'écrit en base 3 : $\overline{121010201}$. Déterminer le reste de la division de B par 7.

PROBLÈME

On désigne par $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions numériques à variable réelle continues sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Partie A

1. Montrer que, f étant un élément de $\mathscr{C}$, on peut associer à tout réel a strictement positif un réel, noté $F(a)$, défini par

$$F(a) = \int_a^{3a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. a décrivant $\mathbb{R}_+^\star$, on définit ainsi une fonction F de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

   Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad F'(x) = \frac{f(3x) - f(x)}{x}.$$

   La fonction F est-elle élément de $\mathscr{C}$?

3. Définir F dans les deux cas particuliers suivants :
   a. $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$;
   b. $f : t \longmapsto 1$.

Partie B

On étudie le cas où f est l'application $f:\ t \longmapsto \cos t$ c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\star},\quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette question est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1. Déterminer

  a. Le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$;

  b. Le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^{\star},\quad \left|\frac{f(t)}{t}\right| \leqslant \frac{1}{t}$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\star},\quad |F(x)| \leqslant \mathrm{Log}\,3.$$

3. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\star},\quad \mathrm{Log}\,3 - F(x) = 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et que

$$0 \leqslant \mathrm{Log}\,3 - F(x) \leqslant 2x^2.$$

En déduire que F admet une limite à droite au point 0.

4. Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^{\star}$ par

$$m(x) = \frac{\mathrm{Log}\,3 - F(x)}{x}.$$

Étudier la limite de m à droite au point 0.

Partie C

Soit G la fonction réelle telle que

$$\left\{\begin{array}{lcll} G(x) & = & F(x) & \forall x \in \mathbb{R}_+^{\star} \\ G(0) & = & \mathrm{Log}\,3. & \end{array}\right.$$

1. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^{\star}$.

2. En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\star},\quad \left|G(x) - \frac{\sin x - 3\sin x}{3x}\right| \leqslant \frac{2}{3x}.$$

En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\star},\quad |G(x)| \leqslant \frac{2}{x}$$

et étudier la limite de G en $+\infty$.

3. Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^{\star}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^{\star}, \quad G'(x) = \frac{-4\cos x \,.\, \sin^2 x}{x}.$$

4. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la fonction G présente un extremum.
Déterminer les intervalles sur lesquels G est

a. croissante ;

b. décroissante.

5. On désigne par G_1 la restriction de G à l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
Donner le tableau de variation de G_1 sans préciser les valeurs des extremums et en déduire que, sur $\left]\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, G_1 admet un zéro.