Baccalauréat S Centres étrangers III juin 1997

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Six personnes jouent au bowling. On appelle « strike » le fait de renverser toutes les quilles d'un seul lancer de boule. Parmi les six personnes, quatre d'entre elles, qui ont l'expérience du jeu, réussissent le « strike » avec une probabilité égale à $\frac{3}{4}$. Les deux autres débutantes, réussissent le « strike » avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Partie A

Un des six joueurs désigné par le hasard se prépare à lancer la boule.
On note E l'évènement : « c'est un des quatre joueurs expérimentés ». $\overline{E}$ est l'évènement contraire. On note enfin S l'évènement : « le joueur fait « strike » ».

1. Déterminer la probabilité de l'évènement $E \cap S$: « le joueur est expérimenté et réussit son « strike » ».
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $\overline{E} \cap S$: « le joueur est débutant et réussit son « strike » ».
3. En déduire la probabilité de l'évènement S.
4. Un « strike » vient d'être réussi. Quelle est la probabilité pour que le joueur qui l'a réussi soit un débutant ?

Partie B

Parmi les six joueurs, on choisit un joueur A expérimenté, et un joueur B débutant.
Ils jouent chacun quatre parties ; une partie consistant à lancer une seule boule : si c'est « strike », la partie est gagnée, sinon, elle est perdue. La probabilité de gagner une partie est donc égale à $\frac{3}{4}$ pour le joueur A et à $\frac{1}{4}$ pour le joueur B.

1. On note X le nombre de parties gagnées par le joueur A ; donner la loi de probabilité de X (on donnera les résultats sous forme de fractions de dénominateur 256).
2. On note Y le nombre de parties gagnées par le joueur B ; on suppose que la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

$Y = y_i$	0	1	2	3	4
Probabilité de $Y = y_i$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Si x_i et y_i sont des éléments de l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$, on suppose que les évènements « $X = x_i$ » et « $Y = y_i$ » sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'évènement « $X < Y$ » c'est-à-dire que le joueur B gagne davantage de parties que le joueur A.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Soit $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, supposé direct.

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C.
   a. Donner les coordonnées du point G.

b. Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. On considère les points : $A'(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B'(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $C'(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$. Ces trois points définissent un plan noté (A′B′C′).

a. Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ et en déduire qu'une équation cartésienne du plan (A′B′C′) est $3x+3y+2z=6$.

b. Montrer que le point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite (AC) si, et seulement s'il existe un nombre réel k tel que : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-k\\ y &=& 0\\ z &=& k\end{array}\right.$.

c. Calculer alors les coordonnées du point K commun à la droite (AC) et au plan (A′B′C′).

3. a. Vérifier que le point L commun à la droite (BC) et au plan (A′B′C′) a pour coordonnées $(0\ ;4\ ;\ -3)$.

b. Montrer que les droites (AB), (A′B′) et (KL) sont parallèles.

c. Caractériser l'intersection des deux plans (ABC) et (A′B′C′), à l'aide de points définis précédemment.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OC}}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, supposé direct.

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on note H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K son projeté orthogonal sur la droite (AB).

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C.

a. Donner les coordonnées du point G.

b. Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

c. Donner une équation cartésienne de ce plan (ABC).

2. a. Montrer que : $\left|\overrightarrow{\text{MA}}\cdot\overrightarrow{\text{OG}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{MH}$.

b. Calculer, en fonction de x, y, z, la distance de M au plan (ABC).

3. a. En interprétant la norme $\left\|\overrightarrow{\text{MA}}\wedge\overrightarrow{\text{MB}}\right\|$ du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{\text{MA}}$ et $\overrightarrow{\text{MB}}$ comme une aire, exprimer la distance MK en fonction de cette norme.

b. En déduire que : $\text{MK} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2+(1-x-y)^2}$.

4. On se place dans le plan (OAB) d'équation $z=0$ et on considère l'ensemble (Γ) des points du plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).

a. Montrer que (Γ) ne contient aucun point de la droite (AB).

b. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ un point du plan (OAB), n'appartenant pas à la droite (AB).

En utilisant les résultats des questions 2. et 3. calculer la valeur du rapport $\dfrac{\text{MH}}{\text{MK}}$.

c. En déduire la nature de l'ensemble (Γ) ; en donner un foyer, la directrice associée et l'excentricité.

PROBLÈME **10 points**

Partie A

On considère, dans cette partie, la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-1)\left(1+\text{e}^{-x}\right).$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, d'unité graphique 4 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x réel.
   b. Étudier le sens de variation de la fonction f'.
   c. En déduire le signe de $f'(x)$, x appartenant à $\mathbb{R}$.
2. **a.** Déterminer le sens de variation de f.
   b. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
   b. Étudier le position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ).
4. **a.** Déterminer l'abscisse du point de (C) où la tangente est parallèle à (Δ).
   b. Écrire une équation de cette tangente (T).
5. Tracer dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, les trois courbes (C), (Δ) et (T). On se limitera aux points dont l'abscisse est comprise entre 0 et 4.
6. Pour tout x réel supérieur ou égal à 1, on considère E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(t~;~y)$ vérifiant

$$1 \leqslant t \leqslant x, \quad t - 1 \leqslant y \leqslant f(t).$$

   Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire de l'ensemble E (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale), en unités d'aire.

Partie B

Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on note $A(x)$ l'intégrale

$$\int_1^x (t-1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Préciser le sens de variation sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ de la fonction A qui, à x associe $A(x)$.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties, que $A(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - x\mathrm{e}^{-x}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} A(x)$.
4. **a.** Montrer que l'équation d'inconnue x réelle $A(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ admet une seule solution α dans l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
   b. Vérifier que : $2,6 < \alpha < 2,7$.
5. Soit h la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par : $h(x) = 1 + \ln(2x)$.
   a. Justifier que h est croissante sur $[1~;~+\infty[$.
   b. Montrer que l'équation $A(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ équivaut à l'équation $h(x) = x$.
6. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 2$, $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$ et $v_{n+1} = h(v_n)$.
   (On admettra que pour tout entier naturel n, u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $[1~;~+\infty[$.
   a. Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant \alpha \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

   (On pourra utiliser la croissance de la fonction h).
   b. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près, par défaut.