Baccalauréat S Centres étrangers septembre 1996

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{AD} = 1 \text{ et AB } = 3.$$

Les points E et F sont définis par

$$\overrightarrow{\text{AE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}} \text{ et } \overrightarrow{\text{BF}} = \sqrt{2}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}.$$

1. **a.** Faire une figure qui sera complétée au fur et à mesure du déroulement de l'exercice.

   b. Montrer qu'il existe une rotation r telle que B = r(D) et F = r(E).

   c. Déterminer l'angle de cette rotation.

   d. Construire, en justifiant la réponse, le centre Ω de cette rotation.

2. Le plan est muni du repère orthonormal de sens direct $\left(\text{A}\,;\, \overrightarrow{\text{AE}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

   a. Déterminer les affixes des points A, B, C, D, E, F.

   b. Soit M un point du plan d'affixe z et M', d'affixe z', son image par r.
   Donner la relation permettant d'exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer les coordonnées exactes de Ω.

3. Quelle est l'image par r du cercle circonscrit au triangle ADE ?

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Cet exercice propose l'étude de l'ensemble (C) des points M du plan dont les affixes vérifient :

$$|(1+\text{i})z - 3 + 3\text{i}|^2 + |z - 6|^2 = 54.$$

1. **Première méthode**

   a. En posant $z = x + \text{i}y$, donner une équation cartésienne de (C).

   b. En déduire la nature de (C).

   c. Construire (C).

2. **Deuxième méthode**

   On désigne par s la similitude qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_1 = s(M)$ d'affixe $z_1 = (1+\text{i})z - 3 + 3\text{i}$ et on désigne par t la translation qui, au point M d'affixe z, associe le point $M_2 = t(M)$ d'affixe $z_2 = z - 6$.

   a. Caractériser géométriquement ces deux transformations.

   b. Déterminer les antécédents respectifs S et T de O par s et t.

   c. Calculer le rapport $\dfrac{\text{S}M}{\text{O}M_1}$ puis le rapport $\dfrac{\text{T}M}{\text{O}M_2}$.

   d. En déduire que (C) est la ligne de niveau définie par :

   $$2\text{S}M^2 + \text{T}M^2 = 54.$$

   e. Calculer l'affixe du barycentre G du système $\{(\text{S},\ 2),\ (\text{T},\ 1)\}$.

   f. Montrer que l'ensemble (C) est défini par $M\text{G}^2 = 8$.

   g. En déduire la nature et les éléments qui déterminent (C).