∽ Baccalauréat C Étranger groupe I juin 1984 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Déterminer la solution f de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = 0,$$

sachant que :

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f'(0) = 0.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On se propose d'étudier la suite u, de terme général u_n, définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n + 2}.$$

1. Soit f l'application de l'intervalle $[0\,;\,1]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+2}.$$

a. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de f. Quelle est l'image du segment $[0\,;\,1]$ par f ?

c. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$\frac{1}{4} \leqslant f'(x) < \frac{2}{3}.$$

d. Établir que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

2. a. Prouver que si la suite u admet une limite ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.

b. En utilisant le 1. c., démontrer que, pour tout entier n :

$$0 \leqslant \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \leqslant \frac{2}{3}.$$

En déduire que la suite u converge vers ℓ et déterminer un entier n_0 tel que si $n > n_0$, alors $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit, dans le plan affine euclidien, un triangle $A_1A_2A_3$.
À tout point M du plan, distinct des sommets A_1, A_2, A_3, du triangle, on associe :

- les points M_1, M_2, M_3, symétriques de M dans les symétries orthogonales $s_{(A_2A_3)}$, $s(A_3A_1)$, $s(A_1A_2)$ d'axes respectifs les droites (A_2A_3), (A_3A_1), (A_1A_2).
- Les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 issues des sommets A_1, A_2, A_3 et respectivement perpendiculaires aux droites (M_2M_3), (M_3M_1), (M_1M_2). Les symétries orthogonales d'axes Δ_i, $i \in [1\,;\,3]$, sont notées s_i.

1. Démontrer que Δ_1 est la médiatrice du segment $[M_2M_3]$.

2. Soit $s = s_{(A_1A_2)} \circ s_{\Delta_1} \circ s_{(A_1A_3)}$.

a. Quelle est la nature de s ?

b. Déterminer $s(A_1)$, $s(M)$. Caractériser s.

c. Démontrer l'égalité entre mesures d'angles orientés de droites :

$$(\widehat{A_1A_2,\ A_1M}) = (\widehat{\Delta_1,\ A_1A_2}) \quad [\pi] \qquad (1)$$

3. Établir de manière analogue,

$$(\widehat{A_2A_1,\ A_2M}) = (\widehat{\Delta_2,\ A_2A_3}) \quad [\pi] \qquad (2)$$

$$(\widehat{A_3A_2,\ A_3M}) = (\widehat{\Delta_3,\ A_3A_1}) \quad [\pi] \qquad (3)$$

4. Montrer que l'ensemble (C) des points M du plan, distincts des sommets A_1, A_2, A_3 tels que les points M_1, M_2, M_3 soient alignés est contenu dans le cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$.

5. On suppose dans cette question, que le point M n'appartient pas à (C).

a. Démontrer que les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont concourantes en un point P que l'on caractérisera pour le triangle $M_1M_2M_3$.

Dans la suite du problème ce point P est appelé l'associé du point M.

b. Quel est l'associé d'un point M appartenant aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ et distinct des sommets de ce triangle ?

c. On suppose que le point M n'appartient pas aux supports des côtés du triangle $A_1A_2A_3$. Démontrer, en utilisant les relations (1), (2), (3), que si M a pour associé P alors le point P a pour associé M.