Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Étranger groupe 1 [1] juin 1969 ∾

EXERCICE 1

1. z est un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ ; $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.

   Quel est le module et quel est l'argument de $z' = \dfrac{1}{\overline{z}}$?

   Quelle est la transformation géométrique qui associe le point M image de z au point M' image de z' ?

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

   On appelle A le point de coordonnées $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Dans l'inversion $\mathscr{J}$ de centre O et de puissance 1, le point M d'affixe z a pour inverse M' d'affixe z'. Le point M', s'il n'est pas en A, a pour inverse M'' dans l'inversion $\mathscr{J}_1$ de centre A et de puissance 1. Enfin, le point M'' a pour inverse M_1 d'affixe z_1 dans l'inversion $\mathscr{J}$.

   Calculer z_1 en fonction de z. En déduire la nature de la transformation $\mathscr{T}$ qui transforme M en M_1 :

   $$\mathscr{T} = \mathscr{J} \circ \mathscr{J}_1 \circ \mathscr{J}.$$

   Expliquer géométriquement.

EXERCICE 2

1. (O) et (C) sont deux cercles tangents extérieurement. Du centre O de (O) on trace une tangente à (C) ; soit T le point de contact de cette tangente et de (C).

   Démontrer que la puissance de T par rapport à (O) est égale au double du produit des rayons des deux cercles.

2. Sur la droite OT on désigne par O′ un point tel que T soit entre O et O' et l'on trace le cercle (O′), de centre O′, tel que (O′) et (C) soient tangents extérieurement. Les données étant les points O et O′ et les rayons, R et R', de (O) et de (O′), à savoir

   $$R = 1, \quad R' = 2, \quad \text{OO}' = 5,$$

   on demande de déterminer le point T et le rayon de (C).

PROBLÈME

Soit f la fonction qui, à la variable réelle x, fait correspondre le réel

$$y = f(x) = \text{e}^x\left(2x^2 - 3x\right),$$

où e est la base des logarithmes népériens.

1. Étudier le sens de variation de cette fonction et en tracer la courbe représentative, (C), par rapport à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.

   [On précisera, en particulier, les limites de y quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$ et l'on déterminera la tangente à (C) à l'origine.]

1. Le groupe 1 comprend les centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique noire.

2. Calculer les dérivées première et seconde, $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$, de la fonction $f(x)$ et vérifier que $y = f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 4\mathrm{e}^x.$$

En déduire que $4\mathrm{e}^x + 2y - y'$ est une primitive de y.

Évaluer l'aire arithmétique $S(a)$ limitée par la courbe (C), l'axe $x'x$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$, où a est un nombre réel négatif.

Démontrer que $S(a)$ a une limite, ℓ, que l'on évaluera, lorsque a tend vers $-\infty$.

3. Soit $f^{(n)}(x)$ la dérivée d'ordre n de f. Démontrer que, quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \left(2x^2 + a_n x + b_n\right),$$

où a_n et b_n sont des entiers relatifs, fonctions de n.

Établir les relations

$$a_{n+1} = a_n + 4 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n + a_n.$$

Calculer a_n et b_n en fonction de n.

4. Démontrer que, quel que soit n, l'équation

$$2x^2 + a_n x + b_n = 0$$

a deux racines réelles et distinctes.

On se propose de trouver toutes les valeurs de n entières supérieures à 1 pour lesquelles ces racines sont des nombres rationnels.

À cet effet, on établira d'abord que ces valeurs de n sont telles que $16n+9$ est le carré d'un nombre entier, p, et ensuite que le reste de la division de p par 8 est égal à 3 ou à 5. On en déduira la forme générale des entiers n cherchés et l'on donnera toutes les valeurs de n inférieures à 30.