Baccalauréat C Étranger groupe I [1] juin 1971

EXERCICE 1

1. Déterminer toutes les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles $\dfrac{n^2-9}{n^-5n+4}$ est un entier relatif (positif, négatif ou nul).

2. Quelle est la plus petite valeur, p, positive et entière telle que, quel que soit le réel x supérieur ou égal à p, on ait

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+4} < 2\ ?$$

EXERCICE 2

1. n désignant un entier naturel, résoudre l'équation

$$(E) \qquad u^n = (-1)^n,$$

dans le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

On distinguera deux cas, suivant la parité de n et l'on déterminera le module et l'argument de chacune des racines de l'équation.

2. Dans le cas où n est pair, on désigne par u_k l'une quelconque des racines de l'équation (E).

La relation $z' = u_k z$ établit une application T_k de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que l'ensemble de ces applications, muni de l'opération composition des applications, a une structure de groupe commutatif.

PROBLÈME

On se propose de chercher comment il faut choisir les nombres réels a, b et c pour que l'expression

$$\frac{ax^2+b\sqrt{2}x+c}{x^2+1}$$

soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à 1, quelle que soit la valeur du nombre réel x,

$$(\mathscr{C}) \qquad \left|\frac{ax^2+b\sqrt{2}x+c}{x^2+1}\right| \leqslant 1$$

1. Démontrer qu'il est nécessaire pour que la condition $(\mathscr{C})$ soit réalisée que l'on ait

$$|a| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |c| \leqslant 1.$$

2. **a.** On suppose que l'on a $a = 1$; quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à b et à c ?

Même question lorsque l'on a $a = -1$.

1. Centres du Bassin méditerranéen et de l'Afrique Noire.

b. On suppose maintenant que l'on a

$$-1 < a < +1 \quad \text{(inégalités strictes)};$$

démontrer qu'il est *nécessaire* que l'on ait

$$b^2 + 2a^2 \leqslant 2.$$

3. a. En supposant $b^2 + 2a^2 = 2$ et $-1 < a < 1$, démontrer que, par rapport à un repère cartésien orthonormé d'axes Ox, Oy et Oz, le point P de coordonnées $(a\,;\ b\,;\ c)$ décrit un cercle (Γ), dont on donnera l'équation du plan, les coordonnées du centre et la valeur du rayon.

b. *Application numérique* :

$$a = \cos\varphi, \quad b = \sqrt{2}\sin\varphi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Construire la courbe représentative, en repère orthonormé, de la fonction f, de la variable réelle x, définie par

$$f(x) = y = \frac{\left(x^2 - 1\right)\cos\varphi + 2x\sin\varphi}{x^2 + 1}.$$

Préciser les coordonnées des points de cette courbe où la tangente est parallèle à l'axe $x'x$.

4. On suppose enfin que l'on a

$$-1 < a < 1 \quad \text{et} \quad b^2 + 2a^2 < 2 \quad \text{(inégalités strictes)}.$$

On appelle toujours P le point de coordonnées $(a\,;\ b\,;\ c)$ dans un repère cartésien orthonormé et, bien sûr, on cherche à satisfaire la condition $(\mathscr{C})$.
Démontrer que le point P appartient soit à la surface soit à l'intérieur du cône (Σ) de révolution dont le sommet est A$(1\,;0\,;1)$, l'axe AO, le demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ et qu'il appartient aussi soit à la surface, soit à l'intérieur du cône (Σ') symétrique de (Σ) par rapport à O.